١٦٣

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد دوم

تصنیف

هوریس لیمب ایم۔اے ایل ایل ڈی، ایس۔سی۔ڈی، ایف۔آر۔ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔اے و کشن چند ایم۔اے
پروفیسران کلیہ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۸ھ م سنہ ۱۳۳۸ف م سنہ ۱۹۲۹ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کرکے
طبع و شایع کی گئی ہے

۸۶ء

دیباچہ (از مصنف)

اِس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اِس میں احصا کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کیگئی ہے جو زیادہ تر اِس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اِس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے اِس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کیگئی ہے اور اِس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اِس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فر} \, \text{ما}}{\text{فر} \, \text{لا}} = \text{ما}$$

کا معیاری حل ہے۔ اِس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اِس لئے اِس کی ابتدا اِس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہوسکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن

یہ کہنا بیجا نہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کیگئی ہے علم احصا کے تعلق کے مدنظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے -

لا متناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استدقاق کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی' احصائی کتاب میں اُس وقت اس نظریہ کا داخل کرلینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کردیا گیا ہے - اسکی بجائے وہ بحث داخل کیگئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کرجائے -

کمیت کے مرکزوں' دو درجی معیاروں' اور اسی قبیل کے چیزوں کا اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کردیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کردیا گیا ہے فقط

جون سنہ ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

ساتواں باب

محدود تکملے

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

نواں باب
خاص منحنی

دسواں باب
انحنا

حصہ دوم

چھٹا باب

تکمل

۲۷۔ مسئلہ کی نوعیت۔ ابواب گزشتہ میں ہم نے تفاعلوں کے تغیر کی شرح پر غور کیا ہے۔ احصا تکملات جسکی طرف اب ہم رجوع ہوتے ہیں بالکل الٹے مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ یعنی اگر تفاعل کے تغیر کی شرح دی ہوئی ہو اور متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت مقرر کردی گئی ہو تو متبوع متغیر کی کسی اور قیمت کے لئے ہمیں تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہے۔ علامتوں میں مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

کا حل درکار ہے جبکہ فہ (لا) متغیر لا کا دیا ہوا تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ لا کی کسی مقررہ قیمت (فرض کرو لا) کے لئے ما ایک خاص قیمت (ب) اختیار کرے۔ مثلاً متحرک نقطہ کی رفتار کا قانون اور وقت ت پر نقطہ کا مقام دیا گیا ہو تو ان امور کی بنا پر کسی وقت ت پر نقطہ کا مقام دریافت کرنا مقصود ہو سکتا ہے۔ یہاں مساوات

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{فہ}(\text{ت}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

کو حل کرنے کے معاول ہے جس میں فہ (ت) وقت ت کا معلومہ تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ ت = ت کے لئے س = سب۔

۱۶۱

اگر ہم ایک مسلسل تفاعل طہ (لا) ایسا دریافت کر سکیں کہ

طہَ (لا) = فہ (لا)

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں تبدیل ہو جاتی ہے

فر ما / فر لا = فر / فر لا طہ (لا) .... (۳)

پس اگر ما پر مسلسل ہونے کی قید لگا دی جائے جو احصا کے اکثر عملی اطلاقات کی صورت میں پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۵۶ کے مطابق

ما = طہ (لا) + مر، جہاں مر مستقل ہے ..... (۴)

مساوات (۱) کا جہاں تک تعلق ہے مستقل مر کی ٹھیک قیمت غیر معین ہے، اور اس لئے مر، اختیاری مستقل کہلاتا ہے اس سے فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے سوال کی باقی ماندہ شرط جس کا ذکر اوپر ہو چکا ہے پوری ہو سکتی ہے۔

پس اگر لا = ا کے لئے ما = ب تو

ب = طہ (ا) + مر

اور اس لئے ما - ب = طہ (لا) - طہ (ا) .... (۵)

اگر دفعہ ۲۵ کے مطابق عامل فر / فر لا کے لئے علامت عف کام میں لائی جائے تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

عف ما = فہ (لا) .... (۶)

اور جبریہ ترقیم کے اصولوں کے مطابق اس کا حل

ما = عف^-۱ فہ (لا) .... (۷)

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جبکہ منقلوب عامل عف^-۱ کی تعریف یہ ہو کہ

عف { عف^-۱ فہ (لا) } = فہ (لا) .... (۸)

تفاعل عف^-۱ فہ (لا) .... (۹)

اگر اس کا وجود ہو تو فہ (لا) کا بلحاظ لا کے غیر معین تکملہ کہلاتا ہے۔

عام طور پر اسکو ہم

$$\int \text{فما}(\text{لا})\,\text{فرلا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

سے تعبیر کرینگے۔

اس ترقیم کی ابتدا کی وجہ اگلے باب میں سمجھائی جائے گی۔ فی الحال (۱۰) کو (۹) کے لکھنے کا ایک دوسرا طریقہ خیال کرنا چاہئے۔

ریاضی کی اکثر شاخوں میں سیدھے اور مقلوب اعمال کے درمیان امتیاز کرنا اکثر ضروری ہوتا ہے۔ سیدھا عمل وہ ہے جو مقررہ قاعدوں کے مطابق کسی دئے ہوئے تفاعل پر ہمیشہ جاری ہو سکے اور اس سے غیر مشتبہ نتیجہ حاصل ہو۔ مقلوب عمل کی نوعیت ایک سوال کی سی ہے یہاں ہمیں وہ تفاعل دریافت کرنا ہوتا ہے جس پر ایک خاص طریقہ سے عمل کرنے سے ایک مقررہ نتیجہ حاصل ہو۔ ممکن ہے کہ اس سوال کا جواب ہو یا اسکا جواب نہو یا ایک سے زیادہ جواب ہوں (دیکھو دفعہ ۱۶)۔ عامل $\text{عف}^{\text{ا}}$ کی صورت میں ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر اسکا ایک جواب موجود ہو تو جمع کردہ مستقل م کے غیر معین ہونیکی وجہ سے جوابوں کی تعداد لا انتہا ہوگی۔ لیکن ہر صورت میں جواب ملتا ہے یا نہیں ابھی تحقیق طلب ہے۔ تاہم ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر مسلسل تفاعل کا نامحدود تکملہ وجود رکھتا ہے اگرچہ اس وسعت کے ساتھ اس مسئلہ کو ثابت کرنیکی ضرورت ہمیں نہیں ہوگی۔

اس باب کے باقی ماندہ حصے میں ہم مختلف اقسام کے ریاضی تفاعلوں کے نامحدود تکملے عملی طور پر دریافت کرنے کے سوال پر غور کرینگے۔

مثال۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع + ج ت دی ہوئی ہے تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع} + \text{ج ت} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2\right) \qquad \ldots\ldots (۱۱)$$

پس

$$\text{س} = \text{ع ت} + \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 + \text{م} \qquad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

شرط $\text{س} = \text{س}_{\text{ب}}$ بوقت $\text{ت} = \text{ت}_{\text{ب}}$ سے م کو دریافت کرکے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س} - \text{س}_{\text{ب}} = \text{ع}(\text{ت} - \text{ت}_{\text{ب}}) + \frac{1}{2}\,\text{ج}(\text{ت}^2 - \text{ت}_{\text{ب}}^2) \qquad \ldots\ldots (۱۳)$$

۳ ۔ ۷ ۔ معیاری شکلیں:۔ کوئی ایسے اٹل قوانین موجود نہیں ہیں جنکی

مدد سے کسی دیے ہوے مسلسل تفاعل فہ (لا) کا ' نا محدود تکملہ'
$\int$ فہ (لا) فرلا یا عفت^{1} فہ (لا) دریافت ہو سکے ۔ جیساکہ اوپر بتایا
جا چکا ہے تکمل مقلوب عمل ہے جس میں تفرق کے سیدھے عمل کے پہلے نتیجوں
کی یادداشت ہی رہنما بنائی جا سکتی ہے ۔

نیز اگرچہ تکملہ ایک خاص معنی میں ہمیشہ وجود رکھتا ہے لیکن ممکن ہے کہ یہ ریاضی میں
عام طور پر استعمال ہونے والے جبریہ یا ماورائی تفاعلوں کے رقوم میں (محدود شکل میں)
بیان نہ ہو سکے ۔ اسکی مثالیں ہیں

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1+\text{لا}^{4}}}\ ،\quad \int \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}\ ،\quad \int \text{ھو}^{\text{لا}^{2}}\,\text{فرلا}\ ،$$

اور انکی فہرست آسانی سے بے حد بڑھائی جا سکتی ہے ۔

تکملات کی کم و بیش باقاعدہ فہرست بنانے کے لئے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا چاہئے
کہ مختلف سادہ تفاعلوں کے تفرقات کی ایک فہرست بنالیں ۔ ان میں سے ہر ایک
عمل کی تقلیب سے نا محدود تکمل کا ایک ضابطہ حاصل ہو جائیگا ۔ اختیاری مستقل کو
جو ہر نا محدود تکملہ میں جمع کیا جاتا ہے صریحی طور پر درج کرنے کی چنداں ضرورت
نہیں ہے لیکن بعض اوقات ایک ہی جملہ کے دو مختلف طریقوں سے حاصل کئے
ہوئے تکملات میں صرف مستقل کا فرق ہوتا ہے ایسے موقعوں پر اختیاری مستقل کی
غیر موجودگی طالب علم پر شدت سے محسوس ہوگی ۔

طالب علم کو ذیل کے اساسی نتیجوں سے پوری واقفیت حاصل کرلینی چاہئے ۔

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (\text{ن})\,\text{لا}^{\text{ن}-1} \qquad \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ن}+1}\times \text{لا}^{\text{ن}+1}\ [\text{سوائے جبکہ ن} = -1] \quad (\text{ا})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{لوک لا} = \frac{1}{\text{لا}} \qquad \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا} \ldots\ldots\ldots (\text{ب})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{ھو}^{\text{ک لا}} = \text{ک}\ \text{ھو}^{\text{ک لا}} \qquad \int \text{ھو}^{\text{ک لا}}\,\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ک}}\times \text{ھو}^{\text{ک لا}} \ldots\ldots\ldots (\text{ج})$$

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{جب لا} = \text{جم لا} \qquad \int \text{جم لا}\,\text{فرلا} = \text{جب لا} \ldots\ldots\ldots (\text{د})$$

۱۶۴

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جم}\,\text{لا} = -\text{جب}\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{جب}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = -\text{جم}\,\text{لا}$ ...... (ع)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{مس}\,\text{لا} = \text{قط}^2\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{قط}^2\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{مس}\,\text{لا}$ ...... (ف)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{مم}\,\text{لا} = -\text{قم}^2\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{قم}^2\,\text{لا}\,\text{فرلا} = -\text{مم}\,\text{لا}$ .... (گ)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ ؛ $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ * ..... (ح)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{مس}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ ؛ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}} \text{مس}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ... (ی)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جبز}\,\text{لا} = \text{جمز}\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{جمز}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{جبز}\,\text{لا}$ ...... (ژ)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جمز}\,\text{لا} = \text{جبز}\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{جبز}\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{جمز}\,\text{لا}$ .... (ک)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{مسز}\,\text{لا} = \text{قطز}^2\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{قطز}^2\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \text{مسز}\,\text{لا}$ ...... (ل)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{ممز}\,\text{لا} = -\text{قمز}^2\,\text{لا}$ ؛ $\int \text{قمز}^2\,\text{لا}\,\text{فرلا} = -\text{ممز}\,\text{لا}$ ...... (م)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}$ ؛ $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}} = \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{لوک} \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ ... (ن)

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}$ ؛ $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}} = \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{لوک} \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ ↑ ... (ط)

* علامت کے بارے میں دفعہ ۳۳ دیکھو۔

↑ علامت کے بارے میں دفعہ ۴۷ دیکھو۔

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{منز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}} \quad \text{اگر}\ \text{لا}^{2} < \text{ا}^{2}،\quad \int\frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{منز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}}$$

......(پ)

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\,\text{ممز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = -\frac{\text{ا}}{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}} \quad \text{اگر}\ \text{لا}^{2} > \text{ا}^{2}،\quad \int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{ممز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$$

.........(ق)

ان میں سے چند ضابطوں کے استعمال میں ذرا احتیاط کی ضرورت ہے۔ اول تو (ح)، (آ)، (ن)، (ط)، (پ)، (ق) میں ا کی علامت سہولت کے لئے مثبت لے لی گئی ہے۔ یہ ہمیشہ جائز ہے کیونکہ شکل میں صرف ا کا مربع واقع ہوتا ہے، نیز جب لا منفی ہو تو ضابطہ (ب) میں ترمیم کرنی پڑے گی کیونکہ منفی مقدار کا لوکارتم نہیں ہوتا۔ اس صورت میں لا = − لاَ اور

ما = لوک لاَ رکھنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{فرما}}{\text{فرلاَ}} = -\frac{1}{-\text{لاَ}} = \frac{1}{\text{لا}}$$

پس $\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک لاَ}$

لا کے مثبت یا منفی ہونے کی دونوں صورتیں ذیل کے ضابطے میں شریک ہیں

$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\ |\text{لا}|$$ ....(ب)

نیز (ط) میں لا کو مثبت مان لیا گیا ہے۔ اور (پ) میں یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ $|\text{لا}| < \text{ا}$ اور (ق) میں کہ $|\text{لا}| > \text{ا}$۔

۴۷:۔ **ضابطوں کی سادہ توسیع** :۔ اوپر کے نتائج کی توسیع کرنیکے لئے اول ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا میں مستقل جمع کردینے سے ضابطوں کی شکل میں کوئی بنیادی فرق نہیں پڑتا۔ [دفعہ ۳۲ (آ) دیکھو]

۱۶۵

پس ظاہر ہے کہ $\int (\text{لا} + \text{ا})^{\text{م}} \text{فرلا} = \frac{1}{\text{م}+1} (\text{لا} + \text{ا})^{\text{م}+1}$ ......(۱)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + \text{ا}} = \text{لوک} (\text{لا} + \text{ا})$ ....(۲)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{2\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2}} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}}$ ....(۳)

اور اسی طرح ۔ چند دیگر مثالیں دفعہ ۵ ۷ اور ۶ ۷ میں دی گئی ہیں ۔

نیز اگر لا کو مستقل م سے ضرب دے دیا جائے تو تکملہ کی شکل پہلے جیسی ہی رہتی ہے سوائے اسکے کہ وہ م پر تقسیم ہو جاتا ہے ۔ [دفعہ ۳۲ (۲) دیکھو]

مثلاً $\int \text{جب ک لا فرلا} = -\frac{1}{\text{ک}} \text{جم ک لا}$ ....(۴)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا لا} + \text{ب}} = \frac{1}{\text{ا}} \text{لوک} (\text{ا لا} + \text{ب})$ ......(۵)

۱۹۲

اور علی ہذا القیاس ۔

نیز $\int \text{م ع فرلا} = \text{م} \int \text{ع فرلا}$ ..... (۶) جہاں م مستقل ہے ۔

اور $\int (\text{ع} + \text{و} + \text{ھ} + \ldots) \text{فرلا} = \int \text{ع فرلا} + \int \text{و فرلا} + \int \text{ھ فرلا} + \ldots$ (۷)

کیونکہ اگر دونوں طرف $\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}$ سے عمل کریں تو ہر ایک صورت میں دفعہ ۲۹ اور ۳۰ کی رو سے ایک مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے ۔ (۷) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ارقام کی تعداد محدود ہے ۔

پس منطق صحیح تفاعل $\text{ا}_0 \text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_1 \text{لا}^{\text{م}-1} + \ldots \text{ا}_{\text{م}-1} \text{لا} + \text{ا}_{\text{م}}$ ......(۸)

کا نامحدود تکملہ $\frac{1}{\text{م}+1} \text{ا}_0 \text{لا}^{\text{م}+1} + \frac{1}{\text{م}} \text{ا}_1 \text{لا}^{\text{م}} + \ldots + \frac{1}{2} \text{ا}_{\text{م}-1} \text{لا}^2 + \text{ا}_{\text{م}} \text{لا}$ ...(۹) ہوگا

اب فرض کرو کہ منطق کسر کی شکل ہے $\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{لا} + \text{ا}}$ ....(۱۰)

عمل تقسیم سے یہ ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر $\frac{\text{۱}}{\text{لا} + \text{ل}}$ ....(۱۱)
کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے، پہلے حصے کا تکمل اوپر کے قاعدہ سے عمل میں لا سکتے ہیں اور (۱۱) کا تکمل ہے ۱ لوک (لا + ل) ....(۱۲)

مثال (۱) $\int (\text{لا}-\text{۱})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۱}+\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} (\text{لا}-\text{۱})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}+\text{۱}} = \frac{\text{۲}}{\text{۵}} (\text{لا}-\text{۱})^{\frac{\text{۵}}{\text{۲}}}$

مثال (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{۲لا}-\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{لوک} (\text{۲لا}-\text{۱})$

مثال (۳) $\int \text{جب}^{\text{۲}} \text{لا فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \int (\text{۱}-\text{جم ۲لا}) \text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{جب ۲لا}$

مثال (۴) $\int \text{مس}^{\text{۲}} \text{لا فرلا} = \int (\text{قط}^{\text{۲}} \text{لا} - \text{۱}) \text{فرلا} = \text{مس لا} - \text{لا}$

مثال (۵) $\int \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۲لا}-\text{۱}} \text{فرلا} = \int \left\{ \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}(\text{۲لا}-\text{۱})} \right\} \text{فرلا}$

$= \frac{\text{۱}}{\text{۶}} \text{لا}^{\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}} \text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}} \text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۶}} \text{لوک} (\text{۲لا}-\text{۱})$

۷۵ — دو درجی نسب نما والی منطق کسریں:— اب ہم بتائیں گے کہ

$$\frac{\text{فا (لا)}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ب لا} + \text{ق}} \quad \text{........(۱)}$$

کی شکل کے کسی جملہ کو کس طرح تکمل کر سکتے ہیں جہاں فا (لا) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اگر ضرورت ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرو تاکہ باقی ا لا + ب کی شکل کا رہ جائے۔ پس تفاعل (۱) ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ب لا} + \text{ق}} \quad \text{........(۲)}$$

کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر ہو سکتا ہے۔ پہلا حصہ دفعہ ۷۴ کے طریقہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ اب صرف حصہ (۲) پر غور کرنا باقی ہے۔

پہلے ہم $\frac{۱}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}}$ .... (۳) پر غور کرینگے۔

نتیجے کی شکل اس بات پر منحصر ہے کہ آیا $\text{پ}^2 < ۴\,\text{ق}$۔ اگر $\text{پ}^2 > ۴\,\text{ق}$ سے تو دو درجی جملہ حقیقی اور جداگانہ اجزاء ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے یعنی

$$\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق} = (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ}) \quad \text{.............(۴)}$$

اور مستقلات ا اور ب کو مناسب قیمت دیکر ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad \text{......(۵)}$$

یہ مساوات متماثلہ ہوگی بشرطیکہ

$$۱ = \text{ا}(\text{لا} - \text{بہ}) + \text{ب}(\text{لا} - \text{عہ}) \quad \text{..........(۶)}$$

یعنی $\text{ا} + \text{ب} = ۰$ اور $\text{ا بہ} + \text{ب عہ} = -۱$ ....(۷)

یعنی $\text{ا} = \frac{۱}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ اور $\text{ب} = -\frac{۱}{\text{عہ} - \text{بہ}}$ ....(۸)

پس
$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})} = \frac{۱}{(\text{عہ} - \text{بہ})}\left\{\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{عہ}} - \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{بہ}}\right\}$$

$$= \frac{۱}{\text{عہ} - \text{بہ}}\left\{\text{لوک}(\text{لا} - \text{عہ}) - \text{لوک}(\text{لا} - \text{بہ})\right\}$$

$$= \frac{۱}{\text{عہ} - \text{بہ}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{لا} - \text{بہ}} \quad \text{.....(۹)}$$

جب ہم نے ایک مرتبہ اس بات کو معلوم کر لیا کہ (۵) کے دونوں طرفین متماثلاً مساوی کئے جا سکتے ہیں تو ا اور ب کی قیمت ذیل کے طریقہ سے زیادہ آسانی سے دریافت ہو سکتی ہے۔ اول ہم دونوں طرف (لا − عہ) سے ضرب دیتے ہیں اور پھر اسمیں لا = عہ رکھنے سے ا کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔ اسی طرح دونوں طرف (لا − بہ) سے ضرب دیکر لا = بہ رکھنے سے ب کی قیمت حاصل ہوتی ہے پس ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔ ا دریافت کرنے کے لئے جملہ کے

نسب نما میں اس کے متناظر جزوی ضربی کو نکال دو اور باقی ماندہ جملہ میں $\text{لا} = \text{عہ}$ درج کر دو۔ اسی طرح ب کے لئے۔

۱۴۰ اگر $\text{پ}^2 = ۴\,\text{ق}$ تو

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\,\text{پ})^2$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ})^2} = -\frac{1}{\text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اگر $\text{پ}^2 < ۴\,\text{ق}$ تو

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ})^2 + (\text{ق} - \tfrac{1}{4}\text{پ}^2) = (\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2$$

جسمیں عہ اور بہ حقیقی ہیں اور بہ کو مثبت لے لیا جا سکتا ہے۔

اب دفعہ ۴۳ (آ) کی سادہ توسیع سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2} = \frac{1}{\text{بہ}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{بہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

$\text{پ}^2 > ۴\,\text{ق}$ والا نتیجہ (۱۱) کے مشابہ شکل میں لکھا جا سکتا ہے کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{لا}^2 + \text{پ}\,\text{لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \tfrac{1}{2}\text{پ})^2 - (\tfrac{1}{4}\text{پ}^2 - \text{ق}) = (\text{لا} - \text{عہ}')^2 - \text{بہ}'^2 \ldots (۱۲)$$

جسمیں عہَ اور بہَ حقیقی ہیں اور بہَ کو مثبت فرض کرلیا جا سکتا ہے۔ اب اگر $|\text{لا} - \text{عہ}'| < \text{بہ}'$ ہے تو دفعہ ۴۳، (پ) سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{بہ}'^2 - (\text{لا} - \text{عہ}')^2} = \frac{1}{\text{بہ}'}\,\text{مسز}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عہ}'}{\text{بہ}'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اسمیں اگر $\text{عہ}' + \text{بہ}' = \text{عہ}$ اور $\text{عہ}' - \text{بہ}' = \text{بہ}$ رکھیں تو دفعہ ۴۶ سے بہ آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ (۹) کے معادل ہے۔

اگر $|\text{لا} - \text{عہ}'| > \text{بہ}'$ تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} - \text{عہ}')^2 - \text{بہ}'^2} = -\frac{1}{\text{بہ}'}\,\text{ممز}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{عہ}'}{\text{بہ}'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اب زیادہ عام شکل (۲) پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ل اور م کے مناسب انتخاب سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ

ا لا + ب = لہ (۲ لا + پ) + مہ .... (۱۵)

یعنی لہ = ½ ا اور مہ = ب - ½ ا پ .... (۱۶)

پس ∫ (ا لا + ب)/(لا² + پ لا + ق) فرلا = لہ ∫ (۲ لا + پ)/(لا² + پ لا + ق) فرلا + مہ ∫ فرلا/(لا² + پ لا + ق)

.... (۱۷)

ظاہر ہے کہ بائیں طرف کے دو تکملات میں پہلا

لوک (لا² + پ لا + ق) .... (۱۸)

کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

اگر نسب نما دو حقیقی جداگانہ اجزاء میں تحویل ہو سکتا ہے تو (۱۷) کے دائیں جانب کے تکملہ کو "جزوی کسروں" کے طریقے سے زیادہ آسانی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ مثلاً

(ا لا + ب)/((لا - عہ)(لا - بہ)) = ﭐ/(لا - عہ) + حب/(لا - بہ) .... (۱۹)

۱۶۹

بشرطیکہ ا لا + ب = ﭐ (لا - بہ) + حب (لا - عہ)

یعنی بشرطیکہ ﭐ + حب = ا اور ﭐ بہ + حب عہ = - ب .... (۲۰)

یعنی ﭐ = (ا عہ + ب)/(عہ - بہ) اور حب = (ا بہ + ب)/(بہ - عہ) .... (۲۱)

ہر صورت میں اس طول عمل کی ضرورت نہیں کیونکہ ﭐ اور حب کی قیمتیں صفحہ (۲۲۹) پر کے طریقہ سے بآسانی دریافت ہو سکتی ہیں۔

پس (۱۷) کے تکملے سے ∫ (ا لا + ب) فرلا/((لا - عہ)(لا - بہ)) = ﭐ لوک (لا - عہ) + حب لوک (لا - بہ)

(۲۲) ....

مثال (۱) ∫ فرلا/(۲ - لا - لا²) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ۱/((۱ - لا)(۲ + لا)) = ﭐ/(۱ - لا) + حب/(۲ + لا)

تو مذکورہ بالا طریقہ سے $\text{ا} = \frac{۱}{۳}$ اور $\text{ب} = \frac{۱}{۳}$

بس $\int \frac{\text{فرلا}}{۲-\text{لا}-\text{لا}^۲} = -\frac{۱}{۳}\,\text{لوک}(۱-\text{لا}) + \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}(۲+\text{لا}) = \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,\frac{۲+\text{لا}}{۱-\text{لا}}$

بطریقہ دیگر

$$\int \frac{\text{فرلا}}{۲-\text{لا}-\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{۹}{۴}-(\text{لا}+\frac{۱}{۲})^۲} = \frac{۲}{۳}\,\text{مسز}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}\,\text{مسز}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}+۱}{۳}$$

مثال (۲) - $\int \frac{\text{فرلا}}{۱-۴\text{لا}+۴\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{(۲\text{لا}-۱)^۲} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲\text{لا}-۱}$

مثال (۳) - $\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲} = \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$

مثال (۴) - $\int \frac{۱-\text{لا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \int \frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(۲\text{لا}-۱)}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا}$

$$= \frac{۱}{۲}\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲} - \frac{۱}{۲}\int \frac{۲\text{لا}-۱}{۱-\text{لا}+\text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(۱-\text{لا}+\text{لا}^۲)$$

مثال (۵) - $\frac{۲\text{لا}-۳}{(\text{لا}-۲)(\text{لا}+۱)}$ کو تکمل کرو۔ ۱۷۰

فرض کرو کہ $\frac{۲\text{لا}-۳}{(\text{لا}-۲)(\text{لا}+۱)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}-۲} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}+۱}$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ا} = \frac{۱}{۳}$ اور $\text{ب} = \frac{۵}{۳}$

اس لئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۲) + \frac{۵}{۳}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+۱)$

۷۶ - شکل $\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}^۲+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}}$ -

اس قسم کے تفاعلوں کے لئے بھی اوپر سے ملتا جلتا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

(آ) اگر ا مثبت ہے تو یہ ذیل کی شکل کے معادل ہے

$$\frac{ا لا + ب}{\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}} \quad \cdots\cdots (۱)$$

سب سے پہلے شکل $\frac{۱}{\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}}$ ....(۲) پر غور کرو۔

مربع کو کامل بنانے سے جذری علامت کے اندر کا جملہ $(لا - عہ)^{۲} \pm بہ^{۲}$ کی ایک یا دوسری شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اب دفعہ ۳۰، (ص) اور (ط) سے

$$\int \frac{فرلا}{\sqrt{(لا - عہ)^{۲} + بہ^{۲}}} = جبز^{-۱} \frac{لا - عہ}{بہ} \quad \cdots\cdots (۳)$$

اور
$$\int \frac{فرلا}{\sqrt{(لا - عہ)^{۲} - بہ^{۲}}} = جمز^{-۱} \frac{لا - عہ}{بہ} \quad \cdots\cdots (۴)$$

ان تفاعلوں کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$لوک \frac{لا - عہ + \sqrt{(لا - عہ)^{۲} \pm بہ^{۲}}}{بہ} \; یا \; لوک \frac{لا - عہ + \sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}}{بہ}$$
(۵) ....

[دفعہ ۴۶ دیکھو]

عام صورت (۱) میں ہم فرض کرتے ہیں

$$ا لا + ب = لہ (لا + \tfrac{۱}{۲} پ) + مہ \quad \cdots\cdots (۶)$$

جو پوری ہوتی ہے اگر $لہ = ا$ اور $مہ = ب - \tfrac{۱}{۲} پ ا$ ....(۷)

اسلئے
$$\int \frac{ا لا + ب}{\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}} فرلا = لہ \int \frac{لا + \tfrac{۱}{۲} پ}{\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}} فرلا + مہ \int \frac{فرلا}{\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}}$$
(۸)..........

پہلا تکملہ $\sqrt{لا^{۲} + پ لا + ق}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر او پر بحث ہو چکی ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ اس دفعہ کی ابتدائی شکل میں سر ا منفی ہے۔ تب عمومیت میں فرق آنے کے بغیر اسے ۱- کے مساوی لیا جا سکتا ہے۔

پہلے تفاعل

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۹)$$

پر غور کرو ۔

اب سوائے اُس صورت کے جبکہ دو درجی جملہ حقیقتاً منفی ہو (جس صورت میں لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے یہ خیالی ہو گا) جملہ کو $\text{ب}^{2} - (\text{لا} - \text{ع})^{2}$ کی شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے ۔

$$\text{اب} \int \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{ب}^{2} - (\text{لا} - \text{ع})^{2}}} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا} - \text{ع}}{\text{ب}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۰)$$

تفاعل کی عام صورت

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۱)$$

میں فرض کرو کہ $\text{ا لا} + \text{ب} = \text{ل} \left(\tfrac{1}{2}\,\text{پ} - \text{لا}\right) + \text{م} \quad \cdots\cdots (۱۲)$

یعنی $\text{ل} = -\text{ا}$ اور $\text{م} = \text{ب} + \tfrac{1}{2}\,\text{ا پ} \quad \cdots\cdots (۱۳)$

$$\text{اس لئے} \int \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا} = \text{ل} \int \frac{\tfrac{1}{2}\text{پ} - \text{لا}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا}$$

$$+\,\text{م} \int \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۴)$$

ان دو میں سے پہلا تکملہ $\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^{2}}$ کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے ۔

۱۰۲ مثال ۱ ۔
$$\int \frac{\text{لا} + 1}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا} = \int \frac{(\text{لا} + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا} = \int \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}}{\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{\tfrac{5}{4} - (\text{لا} + \tfrac{1}{2})^{2}}} = -\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^{2}} + \tfrac{1}{2}\,\text{جب}^{-1} \frac{\text{لا} + \tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}}$$

$$= -\sqrt{1 - \text{لا} - \text{لا}^{2}} + \tfrac{1}{2}\,\text{جب}^{-1} \frac{2\,\text{لا} + 1}{\sqrt{5}}$$

مثال ۲۔ $\int \frac{\text{لا}+۱}{\sqrt{\text{لا}^۲+\text{لا}+۱}}\,\text{فرلا} = \int \frac{(\text{لا}+\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۲}}{\sqrt{\text{لا}^۲+\text{لا}+۱}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{لا}+\frac{۱}{۲}}{\sqrt{\text{لا}^۲+\text{لا}+۱}}\,\text{فرلا}$

$$+\frac{۱}{۲}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}} = \sqrt{\text{لا}^۲+\text{لا}+۱} + \frac{۱}{۲}\,\text{جبز}^{-۱}\frac{\text{لا}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}}$$

$$= \sqrt{\text{لا}^۲+\text{لا}+۱} + \frac{۱}{۲}\,\text{جبز}^{-۱}\frac{۲\text{لا}+۱}{\sqrt{۳}}$$

مثال ۱۳۔ $\int \sqrt{\frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \int \frac{۱-\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}} - \int \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}\,\text{فرلا}$

$$= \text{جب}^{-۱}\,\text{لا} + \sqrt{۱-\text{لا}^۲}$$

۷۷ — تغیر کی تبدیلی:۔ تکمل کے دریافت کرنے میں دو ترکیبیں خاص طور پر مفید ثابت ہوئی ہیں ایک تو نئے متبوع متغیر کا انتخاب اور دوسرے تکمل بالحصص۔

فرض کرو کہ تکملہ $\text{ع} = \int \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ .... (۱)
میں متغیر کو لا سے ت میں بدلنا ہے جہاں لا نئے متغیر ت کا دیا ہوا تفاعل ہے تو دفعہ ۳۲ سے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{فا}(\text{لا}) \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad .....\ (۲)$$

اور اس لئے مقلوب علامت $\int$ کی تعریف سے

$$\text{ع} = \int \text{فا}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$$

پس $\int \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int \text{فا}(\text{لا})\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\text{فرت}$ ....(۳)* ۱۲۳

[* اس سے قاعدہ نکلتا ہے کہ علامت $\int$ کے بعد فرلا کی بجائے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ فرت درج کردو]

اور برعکس اس کے جب کبھی دیا ہوا تکملہ شکل

$$\int \text{فہ}(\text{ع}) \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

کا ہو تو اسکی بجائے $\int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع}$ .... (۵)

رکھ سکتے ہیں اور اکثر اسے دریافت کرنا آسان ہوتا ہے۔

ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

(آ) $\int \text{فہ}(\text{لا}+\text{ا})\, \text{فرلا} = \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع}$ .... (۶)

جہاں $\text{ع} = \text{لا} + \text{ا}$

(ب) $\int \text{فہ}(\text{ک لا})\, \text{فرلا} = \frac{1}{\text{ک}} \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع}$ .... (۷)

جہاں $\text{ع} = \text{ک لا}$۔ یہ دونوں نتیجے دفعہ ۴۷ میں استعمال میں آ چکے ہیں۔

(ج) $\int \text{فہ}(\text{لا}^2)\, \text{لا فرلا} = \frac{1}{2} \int \text{فہ}(\text{ع})\, \text{فرع}$ .... (۸)

جہاں $\text{ع} = \text{لا}^2$

ذیل کے تکملے (۸) کی مثالیں ہیں۔

مثال (۱)۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا}^2)} = \int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا}^2)} = \int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}(1+\text{ع})}$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{\text{ع}+1}\right)\text{فرع} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ع}}{\text{ع}+1} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}$$

$$= \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$$

مثال (۲)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}^2-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\text{ع}-1} - \frac{1}{\text{ع}+1}\right)\text{فرع}$

$$= \frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ع}-1}{\text{ع}+1} = \frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2-1}{\text{لا}^2+1}$$

۱۷۴

مثال (۳)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{1+\text{لا}^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{فرلا}^2}{1+\text{ع}^2} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}^2$

مثال (۴)۔ $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^4-\text{لا}^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{فرع}}{\sqrt{\text{ا}^4-\text{ع}^2}} = \frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ع}}{\text{ا}^2} = \frac{1}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}$

طالب علم کچھ مشق کے بعد اس طرح کے آسان ابدال زبانی کرسکیگا۔

(۴) بعض اوقات جبریہ تفاعل کے تکمل کرنے میں ابدال $\text{لا} = \frac{1}{\text{ت}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\frac{1}{\text{ت}^2}$ * سے سہولت پیدا ہوتی ہے۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} = -\int \frac{\text{فرت}}{\text{ت}\sqrt{\text{ا}^2+\text{ت}^{-2}}} = -\frac{1}{\text{ا}}\int \frac{\text{فرت}}{\sqrt{\text{ت}^2+\text{ا}^{-2}}}$$

$$= -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جبز}^{-1}\text{ات} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جبز}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} \quad \ldots (۹)$$

اسی طرح $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جمز}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$ ....(۱۰)

اور $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}} = -\frac{1}{\text{ا}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{لا}}$ ....(۱۱)

زیادہ عام طور پر تکملہ $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+\text{ا})\sqrt{\text{الا}^2+\text{ب لا}+\text{ج}}}$ ....(۱۲)

ابدال $\text{لا}+\text{ا} = \frac{1}{\text{ت}}$ سے دفعہ ۶۷ میں غور کی ہوئی شکلوں میں سے کسی ایک میں تحویل ہوجاتا ہے۔

نیز تبادلہ $\text{لا} = \frac{1}{\text{ت}}$ سے

۱۷۵

* [یہ ابدال $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی بجائے $-\frac{\text{فرت}}{\text{ت}}$ لکھنے کے معادل ہے]

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\text{فرت}}{\text{ت}^3(\text{ا}^2+\text{ت}^{-2})^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\text{ت فرت}}{(1+\text{ا}^2\text{ت}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\text{ا}^2\text{ت}^2}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} \quad \cdots\cdots\ (۱۳)$$

اسی طرح

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \quad \cdots\cdots\ (۱۴)$$

اور

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-\text{ا}^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}} \quad \cdots\cdots\ (۱۵)$$

شکل

$$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا لا}^2+\text{ب لا}+\text{ج})^{\frac{3}{2}}} \quad \cdots\cdots\ (۱۶)$$

کو مربع کامل بنانے سے یہ مذکورہ بالا صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

۷۸ ۔ مثلثی تفاعلوں کا تکمل۔

(آ)

$$\int \text{مس لا فرلا} = \int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}\,\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم لا}} = -\,\text{لوک جم لا}$$

$$= \text{لوک قط لا} \quad \cdots\cdots\ (۱)$$

اسی طرح

$$\int \text{مم لا فرلا} = \text{لوک جب لا} \quad \cdots\cdots\ (۲)$$

اسی ترکیب سے

$$\int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = -\int \frac{\text{فر(جم لا)}}{\text{جم}^2\,\text{لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}} = \text{قط لا} \quad \cdots\ (۳)$$

اور

$$\int \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^2\,\text{لا}}\,\text{فرلا} = -\,\text{قم لا} \quad \cdots\cdots\ (۴)$$

دفعہ ۳۱ (۲) دیکھو۔

۱۷۶

(۲)

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{۲\,\text{جب}\frac{\text{لا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{۲}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{قط}^2\frac{\text{لا}}{۲}\,\text{فرلا}}{\text{مس}\frac{\text{لا}}{۲}}$$

$$= \int \frac{\text{فر}\left(\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{2}\right)}{\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{2}} = \text{لوگ مس}\,\frac{\text{لا}}{2} \qquad \ldots\ldots(۵)$$

اس سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{2}+\text{لا}\right)} = \text{لوگ مس}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\text{لا}}{2}\right) \qquad \ldots(۶)$$

ضوابط (۱) تا (۶) معیاری نتیجے شمار ہوتے ہیں اور انہیں حفظ کر لینا چاہیے

(۳)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}} = \int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}^2\frac{\text{لا}}{2} + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{2}}$$

$$= \int \frac{\text{قط}^2\frac{\text{لا}}{2}\ \text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{ب}) + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{2}} \qquad \ldots\ldots(۷)$$

اب اسمیں اگر مس $\frac{\text{لا}}{2}$ = ع رکھیں تو

$$= 2\int \frac{\text{فرع}}{(\text{ا}+\text{ب}) + (\text{ا}-\text{ب})\,\text{ع}^2} \qquad \ldots\ldots(۸)$$

اور یہ دفعہ ۳، کی معیاری شکلوں (آ)، (پ)، (ف) میں سے کسی ایک کے تحت آتا ہے۔

اسی طرح اسی ابدال سے
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جب لا}} = 2\int \frac{\text{فرع}}{\text{ا} + 2\text{ب ع} + \text{ا ع}^2} \qquad \ldots(۹)$$

(۴)
$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{لا} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{لا}} = \int \frac{\text{قط}^2\,\text{لا فرلا}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2\,\text{مس}^2\,\text{لا}} \qquad \ldots\ldots(۱۰)$$

اور اسمیں مس لا = ع رکھنے سے

$$\int \frac{\text{فرع}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ب}}\int \frac{\text{فر}(\text{ب ع})}{\text{ا}^2 + (\text{ب ع})^2} = \frac{1}{\text{اب}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب ع}}{\text{ا}}$$

$$= \frac{1}{\text{اب}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس لا}\right) \qquad \ldots(۱۱)$$

زائدی تفاعلوں والے متشابہ نتیجے یہاں درج کئے جاتے ہیں۔

$\int$ مسز لا فرلا = لوک جمز لا ، $\int$ ممز لا فرلا = لوک جبز لا .....(۱۲)

$\int \frac{\text{جبز لا}}{\text{ممز}^2 \text{لا}}$ فرلا = ـ قطز لا ، $\int \frac{\text{جمز لا}}{\text{جبز}^2 \text{لا}}$ فرلا = ـ قمز لا .....(۱۳)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جبز لا}}$ = لوک مسز $\frac{\text{لا}}{2}$ ....(۱۴)

$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جمز لا}} = 2 \int \frac{\text{قو}^{\text{لا}} \text{فرلا}}{\text{قو}^{\text{لا}}+1}$ = ۲ مس$^{-1}$ قو$^{\text{لا}}$ ....(۱۵)

اسی طرح شکلوں $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا + ب جمز لا}}$ اور $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا + ب جبز لا}}$ کا تکمل ابدال

مسز $\frac{\text{لا}}{2}$ = ع سے عمل میں آسکتا ہے۔

۷۹ ـ مثلثی ابدال ـ جبریہ تفاعلوں کا تکمل جنہیں دو درجی جملوں کا جذر شامل ہوتا ہے اکثر اوقات متبوع متغیر کی بجائے مثلثی یا زائدی تفاعل درج کرنے سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ کی موجودگی سے ابدال لا = ا جب طہ یا لا = ا مسز ع ذہن میں آتا ہے،

نیز $\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$ کی موجودگی سے ابدال لا = ا قط طہ یا لا = ا جمز ع

اور $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}$ کی موجودگی سے ابدال لا = ا مس طہ یا لا = ا جبز ع کی طرف توجہ جاتی ہے۔

مثال (۱)، تکملہ $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ فرلا ....(۱) کو دریافت کرو۔

لا = ا جب طہ اور فرلا = ا جم طہ فرطہ رکھنے سے

$$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \text{جم}^2\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ا}^2 \int (1 + \text{جم}\,2\,\text{طہ})\ \text{فرطہ}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{ا}^2 (\text{طہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{جب}\,2\,\text{طہ}) = \tfrac{1}{2}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \tfrac{1}{2}\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} \quad \ldots\ldots (۲)$$

مثال (۲) تکملہ $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ .... (۳) دریافت کرو۔

لا = ا جبز ع اور فرلا = ا جمز ع فرع درج کرنے سے

$$\int \frac{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \int \text{ہمز}^2\,\text{ع}\ \text{فرع} = \int (1 + \text{قمز}^2\,\text{ع})\ \text{فرع}$$

$$= \text{ع} - \text{ہمز}\,\text{ع} = \text{جبز}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{لا}} \quad \ldots (۴)$$

۱۶۸

مثال (۳)۔ $\int \frac{\text{فرلا}}{(1 - \text{لا})\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$ کو دریافت کرو۔

اگر لا = جم طہ اور فرلا = − جب طہ فرطہ اس میں درج کریں تو

$$\text{تکملہ} = -\int \frac{\text{فرطہ}}{1 - \text{جم}\,\text{طہ}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\text{فرطہ}}{\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{طہ}} = \text{ہم}(\tfrac{1}{2}\text{طہ}) = \sqrt{\frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}}}$$

۸۰ — تکمل بالحصص — دفعہ ۷۷ میں جس طریقہ کا ذکر کیا گیا ہے یعنی "تکمل بالحصص" وہ دفعہ ۳۰ کے ضابطہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}(\text{ع}\,\text{و}) = \text{ع}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کو الٹانے سے حاصل ہوتا ہے۔ طرفین کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}\,\text{و} = \int \text{ع}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\ \text{فرلا} + \int \text{و}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\ \text{فرلا}$$

جس سے $\int ع \frac{فر و}{فر لا} فر لا = ع و - \int و \frac{فر ع}{فر لا} فر لا$ .... (۲)×

اس سے ذیل کا قاعدہ معلوم ہوتا ہے۔

اگر تکمل شدنی جملہ دو اجزا کا حاصل ضرب ہو جسمیں سے ایک $(\frac{فر و}{فر لا})$ فوراً تکمل ہو سکے تو اسے یہ فرض کر کے تکمل کیا جا سکتا ہے کہ دوسرا جزو (ع) مستقل ہے بشرطیکہ تکمل شدہ جزو (و) اور دوسرے جزو کے مشتق $(\frac{فر ع}{فر لا})$ کے حاصل ضرب کے تکملہ کو اس میں سے گھٹا دیا جائے۔

(۲) میں و = لا رکھنے سے ایک بہت مفید خاص شکل حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\int ع فر لا = لا ع - \int لا \frac{فر ع}{فر لا} فر لا \quad .... (۳)$$

اس قاعدہ کے استعمال کی چند اہم مثالیں ذیل میں درج ہیں

(۱) $\int لوگ لا فر لا = لا لوگ لا - \int لا \times \frac{1}{لا} فر لا$

$= لا لوگ لا - لا \quad .... (۴)$

۱۲۹ (۲) $\int \sqrt{ا^2 - لا^2} فر لا$ دریافت کرو۔

نتیجہ (۳) میں $ع = \sqrt{ا^2 - لا^2}$ رکھنے سے

$$\int \sqrt{ا^2 - لا^2} فر لا = لا \sqrt{ا^2 - لا^2} + \int \frac{لا^2 فر لا}{\sqrt{ا^2 - لا^2}} \quad .... (۵)$$

× اگر ہم $\frac{فر و}{فر لا}$ کی بجائے و لکھیں یعنی و کی بجائے $عف^{-1}$ و تو اسکی شکل ہو جاتی ہے

$عف^{-1}(ع و) - ع عف^{-1} و - عف^{-1}(عف ع \times عف^{-1} و)$

لیکن $\int \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}}\ \text{فرلا} = \text{ا}^۲ \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}} - \int \frac{\text{لا}^۲\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}}$

$$= \text{ا}^۲\ \text{جب}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \int \frac{\text{لا}^۲\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}} \quad ....(۶)$$

(۶) اور (۵) کے حاصل جمع کو ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ۔

$$\int \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لا} \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲} + \frac{۱}{۲} \text{ا}^۲\ \text{جب}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad ......(۷)$$

دفعہ ۹۷ مثال (۱) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

بالکل اسی طریقہ سے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

$$\int \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لا} \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲} + \frac{۱}{۲} \text{ا}^۲\ \text{جبز}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad ....(۸)$$

اور $\int \sqrt{\text{لا}^۲ - \text{ا}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لا} \sqrt{\text{لا}^۲ - \text{ا}^۲} - \frac{۱}{۲} \text{ا}^۲\ \text{جمز}^{-۱} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad .....(۹)$

(۳) تکملوں $\text{پ} = \int \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جم بہلا فرلا}$ اور $\text{ق} = \int \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جب بہلا فرلا} \quad ...(۱۰)$

کی قیمتیں دریافت کرنا ۔

(۲) میں $\text{ع} = \text{جم بہلا}$ اور $\text{و} = \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}$ رکھنے سے

$$\text{پ} = \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جم بہلا} - \int \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}} (-\text{بہ جب بہلا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جم بہلا} + \frac{\text{بہ}}{\text{عا}} \text{ق} \quad ...(۱۱)$$

اسی طرح $\text{ق} = \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جب بہلا} - \int \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{بہ جم بہلا فرلا}$

$$= \frac{۱}{\text{عا}} \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جب بہلا} - \frac{\text{بہ}}{\text{عا}} \text{پ} \quad ....(۱۲)$$

پس
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عاپ} - \text{بہ ق} = \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جم بہلا} \\ \text{بہ پ} + \text{عا ق} = \text{فو}^{\text{عالا}}\ \text{جب بہلا} \end{array} \right. \quad ....(۱۳)$$

١٨٠

$$\text{اور اس لئے}\quad \int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{جم بہ لا}\,\text{زلا} = \text{فو}^{\text{عہ لا}} \times \frac{\text{بہ جب بہ لا} + \text{عہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$$

$$\int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{جب بہ لا}\,\text{زلا} = \text{فو}^{\text{عہ لا}} \times \frac{\text{عہ جب بہ لا} - \text{بہ جم بہ لا}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \qquad (۱۴)$$

۸۱ — متواتر تحویل سے تکمیل:- بعض اوقات تکمل بالحصص یا کسی اور طریقہ سے ایک تکملہ کا حاصل دوسرے آسان تکملہ کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

(ا) فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{زلا}$ .... (۱)

$$\text{تو}\quad \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{عہ}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \int \frac{1}{\text{عہ}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}} \times \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{زلا}$$

$$= \frac{1}{\text{عہ}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}} - \frac{\text{ن}}{\text{عہ}}\,\text{ع}_{\text{ن}-1} \qquad \text{.........}(۲)$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس ضابطہ کے مسلسل استعمال سے $\text{ع}_{\text{ن}}$ تکملہ ع_{0} کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے

جہاں $\text{ع}_{0} = \int \text{فو}^{\text{عہ لا}}\,\text{زلا} = \frac{1}{\text{عہ}}\,\text{فو}^{\text{عہ لا}}$ .... (۳)

مثال (۱) اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{-\text{لا}}\,\text{زلا}$ .... (۴)

$$\text{تو}\quad \text{ع}_{\text{ن}} = -\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + \text{ن}\,\text{ع}_{\text{ن}-1} \qquad \text{............}(۵)$$

$$\text{مثلاً}\quad \text{ع}_{3} = -\,\text{لا}^{3}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 3\,\text{ع}_{2} = -\,\text{لا}^{3}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 3\left(-\,\text{لا}^{2}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 2\,\text{ع}_{1}\right)$$

$$= -\,\text{لا}^{3}\,\text{فو}^{-\text{لا}} - 3\,\text{لا}^{2}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + 6\left(-\,\text{لا}\,\text{فو}^{-\text{لا}} + \text{ع}_{0}\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \int \text{لا}^{3}\,\text{فو}^{-\text{لا}}\,\text{زلا} = -\left(\text{لا}^{3} + 3\,\text{لا}^{2} + 6\,\text{لا} + 6\right)\text{فو}^{-\text{لا}}$$

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم بہ لا}\,\text{زلا}$

اور $\text{ص}_{\text{ن}} = \int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جب بہ لا}\,\text{زلا}$ .... (۶)

تو عن = ۱/به جب به لا × لاᶰ − ∫ ۱/به جب به لا × ن لاᶰ⁻¹ فرلا

= ۱/به جب به لا × لاᶰ − ن/به وں₋₁ .... (۷)

اور وں = − ۱/به جم به لا × لاᶰ − ∫ (− ۱/به جم به لا) ن لاᶰ⁻¹ فرلا

= − ۱/به جم به لا × لاᶰ + ن/به عن₋₁ ...... (۸)

۱۸۱ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ان ضابطوں کی مدد سے عن اور وں معلوم شکلوں ع. یا و. کے رقوم میں ظاہر ہو سکتے ہیں۔

مثال (۱)۔ پس اگر به = ۱ تو

عن = لاᶰ جب لا − ن وں₋₁ اور وں = − لاᶰ جم لا + ن عن₋₁ ...... (۹)

مثلاً ع۳ = لا³ جب لا − ۳ و۲ = لا³ جب لا − ۳ (− لا² جم لا + ۲ ع۱)

= لا³ جب لا + ۳ لا² جم لا − ۶ (لا جب لا − و.)

یعنی ∫ لا³ جم لا فرلا = (لا³ − ۶ لا) جب لا + (۳ لا² − ۶) جم لا

(۳) اگر عن = ∫ مسᶰ طه فرطه .... (۱۰)

= ∫ مسᶰ⁻² طه (قط² طه − ۱) فرطه

= ∫ مسᶰ⁻² طه فر (مس طه) − ∫ مسᶰ⁻² طه فرطه

تو عن = ۱/(ن−۱) مسᶰ⁻¹ طه − عن₋₂ .... (۱۱)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو عن کی قیمت ن کے طاق یا جفت ہونے پر بالترتیب

ع۱ = ∫ مس طه فرطه = لوک قط طه ...... (۱۲)

یا ع. = ∫ فرطه = طه .... (۱۳)

پر منحصر ہوگی۔

اسی طرح اگر $\text{و}_{\text{ن}} = \int \text{ہم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{ف}\,\text{طہ}$ ....(۱۴)

تو ثابت ہو سکتا ہے کہ $\text{و}_{\text{ن}} = -\frac{1}{\text{ن}-1}\,\text{ہم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ} - \text{و}_{\text{ن}-2}$ ....(۱۵)

۸۴ — تحویلی ضابطے (مسلسل)۔

(آ) فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{ف}\,\text{طہ}$

تو $\text{ع}_{\text{ن}} = \int \text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ}\;\text{ف}(\text{جب}\,\text{طہ}) = \text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ}$

$$- \int \text{جب}\,\text{طہ} \times (\text{ن}-1)\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ} \times (-\text{جب}\,\text{طہ})\;\text{ف}\,\text{طہ}$$

$$= \text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ} + (\text{ن}-1)\int (1-\text{جم}^2\,\text{طہ})\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\;\text{ف}\,\text{طہ}$$

$$= \text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ} + (\text{ن}-1)(\text{ع}_{\text{ن}-2} - \text{ع}_{\text{ن}})$$

دوسری طرف لیجا کر ن پر تقسیم کرنے سے

$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}-2}$ ......(۲)

اس ضابطہ کو متواتر استعمال کرنے سے ہر قدم پر قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے، اور آخر الامر اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو تکملہ $\text{ع}_{\text{ن}}$ کی قیمت یا تو

$\text{ع}_1 = \int \text{جم}\,\text{طہ}\;\text{ف}\,\text{طہ} = \text{جب}\,\text{طہ}$ ....(۳)

یا $\text{ع}_0 = \int \text{ف}\,\text{طہ} = \text{طہ}$ ....(۴)

پر منحصر کیجا سکتی ہے بموجب اسکے کہ ن طاق یا جفت ہو۔

(ب) اسی طریقہ پر اگر $\text{و}_{\text{ن}} = \int \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\;\text{ف}\,\text{طہ}$ ....(۵)

تو $\text{و}_{\text{ن}} = -\frac{1}{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{جب}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\,\text{و}_{\text{ن}-2}$ ......(۶)

پس اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $\text{و}_{\text{ن}}$ کی قیمت

$و_1 = \int$ جب طھ ذ طھ $=$ ـ جم طھ .... (۷)

یا $و^0 = \int$ ذ طھ $=$ طھ .... (۸)

پر لا کے منحصر کی جا سکتی ہے ۔

(۳) یہی طریقہ عام تر شکل $ع_{م،ن} = \int$ جب^م طھ جم^ن طھ ذ طھ ...... (۹)

کے لئے استعمال ہو سکتا ہے ۔

اب $ع_{م،ن} = \int$ جب^م طھ جم$^{ن-۱}$ طھ ذ (جب طھ)

$= \frac{۱}{م+۱}$ جب$^{م+۱}$ طھ جم$^{ن-۱}$ طھ ـ $\frac{۱}{م+۱}\int$ جب$^{م+۱}$ طھ × (ن-۱) جم$^{ن-۲}$ طھ × (ـ جب طھ) ذ طھ

$= \frac{۱}{م+۱}$ جب$^{م+۱}$ طھ جم$^{ن-۱}$ طھ + $\frac{(ن-۱)}{(م+۱)}\int$ جب^م طھ جم$^{ن-۲}$ طھ (۱ ـ جم^۲ طھ) ذ طھ

$= \frac{۱}{م+۱}$ جب$^{م+۱}$ طھ جم$^{ن-۱}$ طھ + $\frac{ن-۱}{م+۱}$ ($ع_{م،ن-۲}$ ـ $ع_{م،ن}$)

کسر دور کرنے اور یک جنس رقموں کو اکٹھا کر کے (م + ن) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ع_{م،ن} = \frac{۱}{م+ن}$ جب$^{م+۱}$ طھ جم$^{ن-۱}$ طھ + $\frac{ن-۱}{ن+م}$ $ع_{م،ن-۲}$ ...... (۱۰)

اسی طریقہ سے حاصل ہوگا

$ع_{م،ن} = -\frac{۱}{م+ن}$ جب$^{م-۱}$ طھ جم$^{ن+۱}$ طھ + $\frac{م-۱}{م+ن}$ $ع_{م-۲،ن}$ ...... (۱۱)

ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) کے متواتر استعمال سے ہر قدم پر کوئی قوت نما بقدر ۲ کے گھٹایا جا سکتا ہے اور بالآخر اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو تکملہ $ع_{م،ن}$ کی قیمت ذیل کے چار تکملات میں سے کسی ایک پر منحصر کی جا سکتی ہے ۔

۱۸۳

$ع_{۱،۱} = \int$ جب طھ جم طھ ذ طھ $= \frac{۱}{۲}$ جب^۲ طھ .... (۱۲)

ع۲،۱ = ∫ ز ط = ط .... (۱۳)

ع۲،۱ = ∫ جم ط ز ط = جب ط .... (۱۴)

ع۲،۱ = ∫ جب ط ز ط = - جم ط .... (۱۵)

اِن دفعات کی تحقیقات کی بڑی اہمیت یہ ہے کہ انکی مدد سے محدود تکملات میں سے چند سادہ اور عملی طور پر نہایت مفید ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۰

۸۳ - منطق کسروں کا تکمل۔ جبری تفاعلوں کے تکمل پر اب پھر غور کیا جائیگا ان تفاعلوں کی چند ایسی قسمیں ہیں جن پر عام طریقے عائد ہو سکتے ہیں۔ سب سے پہلے ہم منطق تفاعلوں پر غور کرینگے۔

منطق کسر $\dfrac{\text{فا(لا)}}{\text{ف(لا)}}$ .... (۱) کسر واجب کہلاتی ہے

بشرطیکہ شمار کنندہ کے ابعاد نسب نما کے ابعاد سے کم ہوں۔ کوئی منطق کسر جس میں یہ شرط پوری نہ ہو تقسیم کے عمل سے منطق صحیح تفاعل اور کسر واجب کے حاصل جمع میں تحویل ہو سکتی ہے۔ اس لئے صرف کسر واجب کے تکمل پر غور کرنا کافی ہوگا

پس اگر ف(لا) ن ویں درجے کا کثیر الارقام ہو تو فرض کرو کہ

ف(لا) = لا^ن + پ۱ لا^(ن-۱) + پ۲ لا^(ن-۲) + ... + پ(ن-۱) لا + پن ..... (۲)

یہ مان لیا جائیگا کہ فا(لا) کا درجہ زیادہ سے زیادہ (ن-۱) ہے۔

تکمل کو آسان کرنے کے لئے ہم (۱) کو جزوی کسور کے حاصل جمع میں تحویل کرتے ہیں اس تحویل کا امکان جبر و مقابلہ کے چند عام مسائل پر منحصر ہے جس کے ثبوت کے لئے اس مضمون کی خاص کتابیں دیکھنا چاہئیں*۔

لیکن طالب علم کو یہ معلوم ہو جائیگا کہ ان سادہ صورتوں کے لئے جو زیادہ تر استعمال میں آتی ہیں

* [کمل نظریہ کے لئے کرسٹل کا جبر و مقابلہ باب آٹھ دیکھو]

جبر و مقابلہ کے اس اصولی نظریہ پر حاوی ہونے کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ جو قاعدے اب دئے جائینگے ان سے حاصل کردہ نتیجوں کی تصدیق تجربہ سے بہ آسانی ہو سکتی ہے

۱۸۴ اول یہ فرض کرو کہ مساوات　　ف(لا) = ۰ .... (۳)

کی تمام اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہیں اور یہ ع۱، ع۲، ع۳ ..... عن ہیں۔ تب کثیر الارقام ف(لا) درجہ اول کے ن جداگانہ اجزائے ضربی میں تحویل ہو جاتا ہے یعنی

ف(لا) = (لا − ع۱)(لا − ع۲) ... (لا − عن) .... (۴)

اب یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اس صورت میں کسر (۱)، ن جزوی کسروں کے مجموعہ میں تحویل ہو جاتی ہے جن کے نسب نما ف(لا) کے مختلف اجزائے ضربی ہیں چنانچہ

فا(لا) / (لا − ع۱)(لا − ع۲) .... (لا − عن) = ا۱ / (لا − ع۱) + ا۲ / (لا − ع۲)

\+ ا۳ / (لا − ع۳) + ... + ان / (لا − عن) ... (۵)

جبمیں ا۱، ا۲، ا۳ ..... ان مستقل ہیں۔ اب اگر (۵) کو کسروں سے صاف کیا جائے اور دونوں طرف لا^ن−۱، لا^ن−۲ ..... لا، لا۰ کے سر مساوی رکھے جائیں تو ن مستقل مقداروں کو دریافت کرنیکے لئے ٹھیک ن مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن ابھی یہ ثابت نہیں ہوا کہ زیر بحث شرائط ایک دوسرے سے آزاد اور باہم موافق ہیں، اور ا۱، ا۲ ..... ان کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں جو (۵) کو پورا کریں اور نیز یہ مستقل وحید القیمت ہوں۔ تاہم دونوں منطق صحیح تفاعل جنہیں تماثلاً مساوی ثابت کرنا ہے بالترتیب لا = ع۱، لا = ع۲ .... لا = عن کے لئے مساوی ہونگے بشرطیکہ

*
(۶) ....
ا۱(ع۱ − ع۲)(ع۱ − ع۳) .... (ع۱ − عن) = فا(ع۱)
ا۲(ع۲ − ع۱)(ع۲ − ع۳) .... (ع۲ − عن) = فا(ع۲)
....
ان(عن − ع۱)(عن − ع۲) .... (عن − عن−۱) = فا(عن)

[* یہ دفعہ ۵، (۸) کی توسیع ہے]

یعنی $ا_1 = \frac{فا(ع_1)}{ف'(ع_1)}$ ، $ا_2 = \frac{فا(ع_2)}{ف'(ع_2)}$ ، ..... ، $ا_ن = \frac{فا(ع_ن)}{ف'(ع_ن)}$ ......(۷)

اب چونکہ (ن - ۱) درجہ کے دو منطق صحیح تفاعل لا کی (ن - ۱) سے زیادہ جداگانہ قیمتوں کے لئے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اُس صورت کے جبکہ وہ متماثلاً مساوی ہوں، اِس لئے ثابت ہوا کہ مستقلوں کی اِن قیمتوں کے لئے (۵) مساوات متماثلہ ہے۔ پس

$$\int \frac{فا(لا)}{ف(لا)} ذلا = ا_1 لوک(لا - ع_1) + ا_2 لوک(لا - ع_2) + ... + ا_ن لوک(لا - ع_ن)$$ .... (۸)

مثال (۱) $\int \frac{لا^5}{لا^4 - ۵ لا^2 + ۴}$ .... (۹) کی قیمت دریافت کرو۔

اب $\frac{لا^5}{لا^4 - ۵ لا^2 + ۴} = لا + \frac{۵ لا^3 - ۴ لا}{لا^4 - ۵ لا^2 + ۴}$

$$= لا + \frac{ا}{لا - ۱} + \frac{ب}{لا + ۱} + \frac{ج}{لا - ۲} + \frac{د}{لا + ۲} \text{ ....(۱۰)}$$

۱۸۵ اگر کسور صاف کی جائیں اور سروں کو مساوی رکھا جائے تو ا، ب، ج، د کو دریافت کرنے کے لئے چار خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن اوپر کا طریقہ استعمال کرنا آسان تر ہے اگر فرض کی ہوئی متماثلہ کو (لا - ۱) سے ضرب دیا جائے اور پھر اِس میں لا = ۱ رکھ دیا جائے تو ا کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے اور اسی طرح باقی سروں کے لئے۔

پس $\frac{لا^5}{لا^4 - ۵ لا^2 + ۴} = لا - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{لا - ۱} - \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{لا + ۱} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{لا - ۲} + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{لا + ۲}$ ....(۱۱)

اِس نتیجہ کی بہ آسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔

اسلئے زیر بحث تکملہ $= \frac{۱}{۲} لا^2 - \frac{۱}{۶} لوک(لا - ۱) - \frac{۱}{۶} لوک(لا + ۱) + \frac{۸}{۳} لوک(لا - ۲)$

$+ \frac{۸}{۳} لوک(لا + ۲)$ .... (۱۲)

مثال (۲):- $\int \frac{فرلا}{لا^۲(۱+لا^۲)}$ .... (۱۳) کی قیمت دریافت کرو۔

$\frac{۱}{لا^۲(۱+لا^۲)}$ کو $لا^۲$ کا تفاعل تصور کرکے

$$\frac{۱}{لا^۲(۱+لا^۲)} = \frac{۱}{لا^۲} - \frac{۱}{۱+لا^۲} \text{ .... (۱۴)}$$

جس سے $\int \frac{فرلا}{لا^۲(۱+لا^۲)} = \frac{۱}{لا}$ ـ سس$^{-۱}$ لا .... (۱۵)

۸۴ــ مساوی اصلیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں حقیقی ہوں لیکن تمام جداگانہ نہ ہوں تو ر' رتبہ والی اصل بہ کے جواب میں ف (لا) کا ایک جزو $(لا - به)^ر$ ہوگا۔

جبر و مقابلہ کے نظریہ میں جس کا اوپر ذکر ہو چکا ہے یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اب دفعہ ۸۳ (۱) کے پھیلاؤ میں جزوی کسور کا متناظر سلسلہ یہ ہوگا

$$\frac{ب_۱}{لا - به} + \frac{ب_۲}{(لا - به)^۲} + \frac{ب_۳}{(لا - به)^۳} + \cdots\cdots + \frac{ب_ر}{(لا - به)^ر} \text{ ..... (۱)}$$

جس میں ب$_۱$، ب$_۲$، ..... ب$_ر$ مستقل ہیں اور انکی قیمتیں سروں کو مساوی رکھنے کے طریقے سے یا کسی دوسرے طریقہ سے دریافت ہو سکتی ہیں۔

جملہ (۱) کا نامحدود تکملہ ہے

$$ب_۱ \text{ لوگ } (لا - به) - \frac{ب_۲}{لا - به} - \frac{۱}{۲} \times \frac{ب_۳}{(لا - به)^۲} \cdots\cdots \frac{۱}{ر - ۱} \times \frac{ب_ر}{(لا - به)^{ر-۱}}$$

.... (۲)

مثال (۱):- $\int \frac{فرلا}{لا^۲(۱-لا)}$ .... (۳) کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ $\frac{۱}{لا^۲(۱-لا)} = \frac{ا}{لا} + \frac{ب}{لا^۲} + \frac{ج}{۱-لا}$ .... (۴)

۱۸۶

اگر طرفین کو (۱ - لا) سے ضرب دیں اور پھر لا = ۱ رکھ دیں تو حاصل ہوتا ہے ج = ۱ نیز لا^۲ سے ضرب دیکر لا = ۰ رکھنے سے ب = ۱ دریافت ہوتا ہے۔ اب صرف ا کی قیمت کسی اور طریقہ سے دریافت کرنا باقی ہے۔ اگر مساوات (۴) کے دونوں جانب لا سے ضرب دیں اور لا ← ∞ کردیں تو حاصل ہوتا ہے ا - ج = ۰ یعنی ا = ۱، اس کے معادل طریقہ یہ ہے کہ کسر صاف کرنے کے بعد لا^۲ کے سروں کو مساوی رکھا جائے۔ نیز لا کو کوئی خاص قیمت دے سکتے ہیں مثلاً لا = -۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$-\text{ا}+\text{ب}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ج}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

اور پہلے نتیجوں کی مدد سے ا = ۱ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{پس}\quad \int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{۱}-\text{لا})}=\int\left(\frac{\text{۱}}{\text{لا}}+\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\text{لا}}\right)\text{فرلا}$$

$$=\text{لوک لا}-\frac{\text{۱}}{\text{لا}}-\text{لوک}(\text{۱}-\text{لا})\quad\ldots\ldots(\text{۵})$$

مثال (۲)۔ $\int\frac{\text{۲لا}+\text{۱}}{(\text{لا}+\text{۲})(\text{لا}-\text{۳})^{\text{۲}}}$ .... (۶) کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{۲لا}+\text{۱}}{(\text{لا}+\text{۲})(\text{لا}-\text{۳})^{\text{۲}}}=\frac{\text{ا}}{\text{لا}+\text{۲}}+\frac{\text{ب}}{\text{لا}-\text{۳}}+\frac{\text{ج}}{(\text{لا}-\text{۳})^{\text{۲}}}\quad\ldots\ldots\ldots(\text{۷})$$

مستقلوں کے دریافت کرنے کے اجمالی طریقہ سے

$$\text{ا}=\frac{-\text{۴}+\text{۱}}{(-\text{۲}-\text{۳})^{\text{۲}}}=\frac{\text{۳}}{\text{۲۵}}\text{،}\quad \text{ج}=\frac{\text{۶}+\text{۱}}{\text{۲}+\text{۳}}=\frac{\text{۷}}{\text{۵}}$$

نیز لا سے ضرب دیکر لا ← ∞ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}+\text{ب}=\text{۰}\ \text{یعنی}\ \text{ب}=\frac{\text{۳}}{\text{۲۵}}$$

$$\text{اور اسلئے تکملہ}=-\frac{\text{۳}}{\text{۲۵}}\,\text{لوک}(\text{لا}+\text{۲})+\frac{\text{۳}}{\text{۲۵}}\,\text{لوک}(\text{لا}-\text{۳})-\frac{\text{۷}}{\text{۵}(\text{لا}-\text{۳})}\quad\ldots(\text{۸})$$

مثال (۳)۔ $\int\frac{\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱})^{\text{۲}}}$ .... (۹) کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۷۷ (۳) کی یاد دہانی کی جاتی ہے کہ $\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2+1)^2}$ کو لا^2 کا تفاعل مانکر محض معائنہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{(\text{لا}^2+1)-1}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{1}{\text{لا}^2+1} - \frac{1}{(\text{لا}^2+1)^2}$$

پس

$$\int \frac{\text{لا}^2\ \text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2} = \int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^2+1} - \int \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+1) + \frac{1}{2(\text{لا}^2+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

۸۵ — دو درجی اجزائے ضربی — مذکورہ بالا طریقے ہمیشہ استعمال ہو سکتے ہیں لیکن اگر ف (لا) = ۰ کی کچھ اصلیں خیالی ہوں تو اول تکملہ خیالی شکل میں حاصل ہوگا۔ اگر ہم خیالی جملوں پر غور کرنے سے بچنا چاہتے ہیں تو ذیل کے طریقے پر عمل کرنا چاہئے۔

۱۸۷

مساواتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) جسکے تمام سر حقیقی ہوں پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزا میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس تفاعل

$$\frac{\text{فا}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کو جزوی کسوروں میں تحویل کرنے کی ضمن میں ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

(ا) ہر خطی جزو لا − عا کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے $\frac{\text{ا}}{\text{لا}-\text{عا}}$ ......(۲)

(ب) ہر خطی جزو لا − با کے لئے جو ر مرتبہ تکرار پاتا ہے ر کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{لا}-\text{با}} + \frac{\text{ب}_2}{(\text{لا}-\text{با})^2} + \ldots + \frac{\text{ب}_\text{ر}}{(\text{لا}-\text{با})^\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(ج) ہر دو درجی جزو $\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}$ کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسر کی شکل ہے

$$\frac{\text{ج لا} + \text{د}}{\text{لا}^2 + \text{پ لا} + \text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(د) اور ہر دو درجی جزو $لا^2 + پ لا + ق$ کیلئے جو (ر مرتبہ تکرار پاتا ہے) کسور کا سلسل ذیل کی شکل کا ہے

$$\frac{ج_1 لا + د_1}{لا^2 + پ لا + ق} + \frac{ج_2 لا + د_2}{(لا^2 + پ لا + ق)^2} + \dots\dots + \frac{ج_ر لا + د_ر}{(لا^2 + پ لا + ق)^ر} \dots\dots (5)$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اس طور پر مستقلات کی عین کافی تعداد حاصل ہوتی ہے تاکہ سروں کے باہم مساوی رکھنے کے طریقہ سے تفاعل (۱) کی جزوی کسور کے پورے نظام (۵) کے ساتھ مطابقت قائم ہو سکے۔

٭ اب صرف یہ غور کرنا باقی رہا ہے کہ جزوی کسر $\frac{ج_س لا + د_س}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} \dots\dots (6)$

کا نامحدود تکملہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ $س = 1$ کی صورت پر دفعہ ۴۷ میں غور کیا جا چکا ہے اور عام صورت ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے اس شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے۔ سب سے پہلے $ل$ اور $م$ ایسے دریافت کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\frac{ج_س لا + د_س}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} = ل \frac{2 لا + پ}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} + \frac{م}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} \dots (7)$$

۱۸ یعنی $ل = \frac{1}{2} ج_س$ اور $م = د_س - \frac{1}{2} پ ج_س \dots\dots\dots (8)$

نتیجہ (۷) کے دائیں جانب کی پہلی رقم کا تکملہ ہے

$$- \frac{ل}{(س - 1)} \times \frac{1}{(لا^2 + پ لا + ق)^{س-1}} \dots\dots\dots (9)$$

اور اب صرف ذیل کی قیمت معلوم کرنا باقی ہے

$$\int \frac{ذ لا}{(لا^2 + پ لا + ق)^س} \quad \text{یا} \quad \int \frac{ذ ت}{(ت^2 + ج^2)^س} \dots\dots\dots\dots (10)$$

[٭ ذیل کی بحث صرف مضمون کو مکمل کرنے کی غرض سے یہاں دی گئی ہے، عملی طور پر اسکے استعمال کی شاذ و نادر ضرورت پڑتی ہے۔ اسکو ملتوی رکھنے سے طالب علم کو کوئی نقصان نہیں ہوگا۔ (۱۰) سے کسور کے تکملوں کو تکمل کرنے کا دوسرا طریقہ مثال (۲) میں آگے دیا گیا ہے]

جبکہ $\text{ت} = \text{لا} + \frac{1}{2}\text{پ}$ اور $\text{ج} = \text{ق} - \frac{1}{4}\text{پ}^2$ .... (۱۱)

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left\{\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}}\right\} = \frac{1}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} - (2\text{س}-2)\frac{\text{ت}^2}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} - (2\text{س}-2)\times\frac{(\text{ت}^2+\text{ج})-\text{ج}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}}}$$

$$= \frac{-(2\text{س}-3)}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} + (2\text{س}-2)\times\frac{\text{ج}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}}} \quad \cdots\cdots (۱۲)$$

پس تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} = -(2\text{س}-3)\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} + (2\text{س}-2)\,\text{ج}\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}}}$$

یعنی

$$\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}}} = \frac{1}{(2\text{س}-2)\text{ج}}\times\frac{\text{ت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}} + \frac{(2\text{س}-3)}{(2\text{س}-2)\text{ج}}\int\frac{\text{فت}}{(\text{ت}^2+\text{ج})^{\text{س}-1}}$$

.... (۱۳)

اس لئے پہلی ترقیم پر واپس آنے سے

$$\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^2+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}}} = \frac{1}{2(\text{س}-1)(\text{ق}-\frac{1}{4}\text{پ}^2)}\times\frac{\text{لا}+\frac{1}{2}\text{پ}}{(\text{لا}^2+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}-1}}$$

$$+\frac{(2\text{س}-3)}{2(\text{س}-1)(\text{ق}-\frac{1}{4}\text{پ}^2)}\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^2+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق})^{\text{س}-1}} \quad \cdots\cdots (۱۴)$$

اور یہی مطلوبہ تحویلی ضابطہ ہے۔ اس نتیجے کے متواتر استعمال سے تکملہ (۱۰) کی قیمت آخر میں

$$\int\frac{\text{فلا}}{\text{لا}^2+\text{پ}\,\text{لا}+\text{ق}} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۵)$$

پر لاکے منحصر کی جا سکتی ہے اور اس تکملہ (۱۵) کی قیمت دفعہ ۵ سے معلوم ہے۔

مثال (۱) $\int\frac{\text{فلا}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+1)^2}$ .... (۱۶) کی قیمت دریافت کرو۔

نسب نما کے دو، درجہ دوم کے اجزا $(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$، اور $(\text{لا}^2-\text{لا}+1)$ ہیں، اور ان کی مزید تحلیل نہیں ہوسکتی۔

اس لئے اوپر کے قاعدہ کے مطابق ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\text{لا}^4+\text{لا}^2+1}=\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}+\frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\quad\ldots\ldots\ldots(17)$$

یعنی $1=(\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}^2-\text{لا}+1)+(\text{ج}\,\text{لا}+\text{د})(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

۱۸۹

لا کی مختلف قوتوں کے سر مساوی رکھنے سے

$\text{ا}+\text{ج}=0,\quad -\text{ا}+\text{ج}+\text{ب}+\text{د}=0$

$\text{ا}+\text{ج}-\text{ب}+\text{د}=0$ اور $\text{ب}+\text{د}=1$

پس $\text{ا}=-\text{ج}=\frac{1}{2}$ اور $\text{ب}=\text{د}=\frac{1}{2}\quad\ldots\ldots\ldots(18)$

اب دفعہ ۱۸۵ کے طریقہ سے تکمل دریافت ہوسکتا ہے۔ چنانچہ

$$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^4+\text{لا}^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}\,\text{فرلا}-\frac{1}{2}\int\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2\text{لا}+1)+1}{\text{لا}^2+\text{لا}+1}\,\text{فرلا}-\frac{1}{4}\int\frac{(2\text{لا}-1)-1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}\,\text{فرلا}$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوگ}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)-\frac{1}{4}\text{لوگ}(\text{لا}^2-\text{لا}+1)+\frac{1}{4}\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوگ}\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\text{سس}^{-1}\frac{2\text{لا}+1}{\sqrt{3}}+\text{سس}^{-1}\frac{2\text{لا}-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\text{لوگ}\frac{\text{لا}^2+\text{لا}+1}{\text{لا}^2-\text{لا}+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{سس}^{-1}\frac{\sqrt{3}\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\quad\ldots\ldots\ldots(19)$$

مثال (۲) $\int\frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2}\quad\ldots\ldots\ldots(20)$ کی قیمت دریافت کرو۔

نتیجہ (۱۴) کے مطابق اسکی قیمت دریافت ہوسکتی ہے لیکن ذیل کا طریقہ زیادہ آسان ہے۔

اگر $\text{لا}=\text{سس}\,\text{طہ}$ رکھا جائے تو

$$\int \frac{فر لا}{(۱+لا^۲)^۲} = \int جم^۲ طہ\, فر طہ = \frac{۱}{۲}\int (۱+جم ۲طہ) فر طہ$$

$$= \frac{۱}{۲} طہ + \frac{۱}{۴} جب ۲طہ = \frac{۱}{۲} سس^{-۱} لا + \frac{۱}{۲} \times \frac{لا}{۱+لا^۲} \quad .... (۲۱)$$

۸۶ — غیر منطق تفاعلوں کا تکمل :- اس بارے میں ذیل کے نتیجے اہم ہیں

(آ) جبریہ تفاعلوں کی صورت میں جنمیں متغیر کی کسری قوتوں کے سوائے اور کوئی غیر منطق مقدار نہیں ہے ہم

$$لا = ت^م \quad اور \quad \frac{فر لا}{فر ت} = م\, ت^{م-۱} \quad .... (۱)$$

رکھ سکتے ہیں جہاں کسری قوت نماؤں کے نسب نما کا ذو اضعاف اقل م ہے اور سوال اس طور پر ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں بدل جاتا ہے۔

(آآ) لا اور ی کا کوئی منطق تفاعل جہاں $ی = \sqrt{ا + ب لا} \quad .... (۲)$ ۲۹۰

ابدال $ا + ب لا = ت^۲$ اور $\frac{فر لا}{فر ت} = \frac{۲ت}{ب}$ .... (۳) کے ذریعہ تکمل ہو سکتا ہے۔

$$پس \int فا(لا، ی) فر لا = \int فا\left(\frac{ت^۲ - ا}{ب}، ت\right) \frac{۲ت\, فر ت}{ب} \quad ..... (۴)$$

اور تکمل کی علامت کے اندر کا ت کا تفاعل منطق ہے۔

مثال (۱) $\int \frac{لا\, فر لا}{\sqrt{لا}+۱}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اگر $لا = ت^۲$ رکھیں تو

$$\int \frac{لا\, فر لا}{۱+\sqrt{لا}} = ۲\int \frac{ت^۳ فر ت}{ت+۱} = ۲\int (ت^۲ - ت + ۱) فر ت - ۲\int \frac{فر ت}{ت+۱}$$

$$= \frac{۲}{۳} ت^۳ - ت^۲ + ۲ت - ۲ لوگ(ت+۱) = \frac{۲}{۳} لا^{\frac{۳}{۲}} - لا + ۲\sqrt{لا} - ۲ لوگ(۱+\sqrt{لا})$$

مثال (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۲}+\text{لا})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$\text{۱}+\text{لا}=\text{ت}^{۲}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=\text{۲ت}$ رکھنے سے

$$\text{تکملہ}=\int\frac{\text{۲ت فرت}}{\text{ت}(\text{۱}+\text{ت}^{۲})}=\text{۲}\int\frac{\text{فرت}}{\text{۱}+\text{ت}^{۲}}=\text{۲ مس}^{-۱}\text{ت}=\text{۲ مس}^{-۱}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}$$

(۳) اگر ی دو درجی جملے کے جذر کو ظاہر کرے تو فرض کرو کہ

$$\text{ی}=\sqrt{\text{ا لا}^{۲}+\text{ب لا}+\text{ج}}$$

اور فا (لا، ی) متغیرات لا اور ی کا منطق تفاعل ہے تو تکملہ $\int$ فا (لا، ی) فرلا کی قیمت دریافت کرنے کا سوال ذیل کے ابدال سے منطق تفاعل کے تکملہ میں تحویل ہو سکتا ہے۔

اگر ا مثبت ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں $\text{ی}=\sqrt{\text{ا}}\times\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{پ لا}+\text{ق}}$ ...(۶)

جس میں $\text{پ}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور $\text{ق}=\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ ۔ اب فرض کرو کہ

$$\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{پ لا}+\text{ق}}=\text{ت}-\text{لا}$$

پس $\text{لا}=\frac{\text{ت}^{۲}-\text{ق}}{\text{۲ت}+\text{پ}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}=\frac{\text{۲}(\text{ت}^{۲}+\text{پ ت}+\text{ق})}{(\text{۲ت}+\text{پ})^{۲}}$ ......(۷)

اور $\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{پ لا}+\text{ق}}=\frac{\text{ت}^{۲}+\text{پ ت}+\text{ق}}{\text{۲ت}+\text{پ}}$ ....(۸)

۱۹۱

اس ابدال سے ظاہر ہے کہ سوال ت کے منطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اگر $\text{لا}^{۲}+\text{پ لا}+\text{ق}$ کے اجزا حقیقی ہیں تو فرض کرو

$$\text{لا}^{۲}+\text{پ لا}+\text{ق}=(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})$$ ....(۹)

تو ذیل کا ابدال بھی استعمال کر سکتے ہیں

$$\text{لا}-\text{بہ}=(\text{لا}-\text{عہ})\,\text{ت}^{۲}$$ ....(۱۰)

جس سے $\text{لا} = \text{عا} + \frac{\text{بہا} - \text{عا}}{۱ - \text{ت}^۲}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{۲(\text{بہا} - \text{عا})\text{ت}}{(۱ - \text{ت}^۲)^۲}$ ....(۱۱)

اور $\sqrt{\text{لا}^۲ + \text{پ لا} + \text{ق}}$

$$= (\text{لا} - \text{عا})\text{ت} = \frac{(\text{بہا} - \text{عا})\text{ت}}{۱ - \text{ت}^۲} \quad ......(۱۲)$$

اگر ر منفی ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ی} = \sqrt{-\text{ر}} \times \sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^۲} \quad ....(۱۳)$$

جسمیں $\text{پ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ر}}$ اور $\text{ق} = -\frac{\text{ج}}{\text{ر}}$، اگر جذر حقیقی ہے تو لازماً $\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^۲$ کے اجزاء ضربی حقیقی ہونے چاہئیں۔ ورنہ اسکی خلاف صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لئے اس جملہ کی علامت ایک ہی رہے گی اور ظاہر ہے کہ لا کی کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے یہ جملہ منفی ہے اس لئے اسکی قیمت ہمیشہ منفی ہوگی۔
پس

$$\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^۲ = (\text{لا} - \text{عا})(\text{بہا} - \text{لا}) \quad ......(۱۴)$$

جس میں عا اور بہا حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ

$$\text{بہا} - \text{لا} = (\text{لا} - \text{عا})\text{ت}^۲ \quad ....(۱۵)$$

تو $\text{لا} = \text{عا} + \frac{\text{بہا} - \text{عا}}{۱ + \text{ت}^۲}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\frac{۲(\text{بہا} - \text{عا})\text{ت}}{(۱ + \text{ت}^۲)^۲}$ ....(۱۶)

اور $\sqrt{\text{ق} + \text{پ لا} - \text{لا}^۲} = (\text{لا} - \text{عا})\text{ت} = \frac{(\text{بہا} - \text{عا})\text{ت}}{۱ + \text{ت}^۲}$ ....(۱۷)

اب ظاہر ہے کہ ان ابدالوں سے فا(لا، ی)، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ متغیر ت کا منطق تفاعل ہو جاتا ہے۔

اوپر کی تحقیقات ایک حد تک اہمیت رکھتی ہے کیونکہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خاص شکل کے تفاعل تکمل ہو سکتے ہیں، اور ان سے خاص قسم کے نتیجے حاصل ہوتے ہیں لیکن خاص خاص صورتوں میں عملی طور پر تکمل دیگر طریقوں سے آسانی سے عمل میں آسکتا ہے*۔

[* دفعہ ۶۷، ۷۷، اور ۹۷ کے طریقے خاص طور پر دیکھو]

اس باب کے دوران میں ایسی کئی مثالیں آ چکی ہیں۔ اور نمونے کے طور پہ ایک اور دو مثالیں یہاں دی جاتی ہیں۔

مثال (۳):۔ نسب نما کو ناطق بنانے سے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}+1}+\sqrt{\text{لا}}} = \int \left\{\sqrt{1+\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}}\right\} \text{فرلا}$$

$$= \frac{2}{3}(1+\text{لا})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\text{لا}^{\frac{3}{2}}$$

۱۹۲ مثال (۴):۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \int \left\{\text{لا} - \sqrt{\text{لا}^2-1}\right\} \text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\text{لا}^2 - \int \sqrt{\text{لا}^2-1}\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\text{لا}^2 - \frac{1}{2}\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1} + \frac{1}{2}\text{جمز}^{-1}\text{لا}$$

بطرز دیگر لا = جمز ع رکھنے سے تکملہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\int \frac{\text{جبز ع فرع}}{\text{جمز ع}+\text{جبز ع}} = \int \text{قو}^{-\text{ع}}\ \text{جبز ع فرع}$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\text{قو}^{-2\text{ع}})\ \text{فرع} = \frac{1}{2}\text{ع} + \frac{1}{4}\text{قو}^{-2\text{ع}}$$

اور آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دونوں نتیجوں میں صرف مستقل کا فرق ہے۔

امثلہ ۲۳

ذیل کے جملوں کے نا محدود تکملات دریافت کرو اور تفرق کر کے انکی تصدیق کرو۔

(۱) $\frac{1}{1-\text{لا}}$ ، $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ (۲) $\frac{1}{2\text{لا}-1}$ ، $\frac{1}{(2\text{لا}-1)^2}$

(۳) $(\text{لا}-1)^2$ ، $\frac{1}{(\text{لا}-1)^2}$ ، (۴) $\sqrt{\text{لا}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}}}$ ، $\frac{\text{لا}+1}{\sqrt{\text{لا}}}$

(۵) $\frac{1}{\sqrt{۲+لا}}$ ، $\sqrt{۲-۳لا}$　　(۶) $\frac{۱+لا}{لا}$ ، $\frac{۱+لا}{لا^۲}$

(۷) $\frac{۱-۲لا}{۳+لا}$ ، $\frac{۲+لا}{۳-لا}$　　(۸) $(لا+\frac{۱}{لا})^۲$ ، $(لا+\frac{۱}{لا})^۳$

(۹) $\frac{۱+لا}{۱-لا}$ ، $\frac{۱-لا}{۱+لا}$　　(۱۰) $\frac{لا^۲}{۱+لا}$ ، $\frac{لا^۲}{۱-لا}$

(۱۱) $\frac{۱-لا^۲}{۱+لا^۲}$ ، $\frac{۱+لا^۲}{۱-لا^۲}$　　(۱۲) جم^۲ لا ، مم^۲ لا

(۱۳) (جم لا - جب لا)^۲　　(۱۴) جمز^۲ لا ، جبز^۲ لا

(۱۵) مسز^۲ لا ، ممز^۲ لا　　(۱۶) $\frac{۱-لا^م}{۱-لا}$ ، $\frac{۱+لا^{۲م+۱}}{۱+لا}$

امثلہ ۲۴
حرکیاتی سوالات

(۱) ایک ذرہ قانون $\frac{فرس}{فرت}$ = ع - ج ت کے مطابق حرکت کر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ ساکن ہونے سے پہلے وہ فاصلہ $\frac{ع^۲}{۲ج}$ طے کریگا۔ (ج اسراع بجاوبہ اوض)

(۲) اگر ایک نقطہ سکون سے وقت ت = ۰ پر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت شروع کرے اور کسی وقفہ کے بعد اسکی رفتار و$_۱$ ہو اور اس وقفہ کے اندر اوسط رفتار و̅ ہو تو ثابت کرو کہ و̅ = $\frac{۱}{۲}$ و$_۱$

(۳) سوال (۲) کی ترقیم میں اگر اسراع تⁿ کے متناسب ہو تو

$$و̅ = \frac{۱}{ن+۲} \times و$$

(۴) ایک ذرہ کی حرکت کا قانون $\frac{فرس}{فرت}$ = و جم ن ت ہے۔ ثابت کرو کہ

ت = ۰ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{و}{ن}$ طے ہوگا۔

(۵) اگر مزاحم واسطہ میں متحرک ذرہ کی رفتار $\frac{فرس}{فرت} = و\, قو^{-ک ت}$ ہو تو ثابت کرو کہ ذرہ وقت ت = ۰ کے مقام سے فاصلہ $\frac{و}{ک}$ کبھی طے نہیں کر سکتا۔

(۶) ایک ذرہ قانون $\frac{فرس}{فرت} = و\, قو^{-ک ت}$ جم ن ت کے مطابق حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ ت = ۰ سے ساکن ہونے تک فاصلہ $\frac{ن\, قو^{-ک \frac{\pi}{۲ن}} + ک}{ن^۲ + ک^۲}$ و طے کرتا ہے۔

(۷) ثابت محور کے گرد گھومنے والے جسم کی زاوی رفتار $\frac{فرطہ}{فرت} = ۲\, ن\, قطر ن\, ت$ ہے ثابت کرو کہ اگر طہ = ۰ بوقت ت = ۰ تو طہ = ۴ $مس^{-۱} قو^{ن ت} - \pi$

امثلہ ۲۵
(درجہ دوم کے نسب نما)

(۱) $\int \frac{۱ + لا}{۱ + لا^۲} فرلا = مس^{-۱} لا + لوک \sqrt{۱ + لا^۲}$

(۲) $\int \frac{لا^۳}{۱ + لا^۲} فرلا = \frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک \sqrt{۱ + لا^۲}$

(۳) $\int \frac{لا^۳}{۱ - لا^۲} فرلا = -\frac{۱}{۲} لا^۲ - لوک \sqrt{۱ - لا^۲}$ ۱۹۴

(۴) $\int \frac{فرلا}{۱ - ۲لا + ۲لا^۲} = مس^{-۱} (۲لا - ۱)$

(۵) $\int \frac{فرلا}{۱ + ۳لا + ۲لا^۲} = لوک \frac{۲لا + ۱}{لا + ۱}$

(۶) $\int \frac{۳\text{لا} + ۷}{۲\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا} + ۵}\,\text{فرلا} = \frac{۳}{۴}\,\text{لوک}(۲\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا} + ۵) + \frac{۳۷}{۲\sqrt{۳۱}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{۴\text{لا} - ۳}{\sqrt{۳۱}}$

(۷) $\int \frac{۲\text{لا} - ۱}{\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۳}\,\text{فرلا} = \text{لوک}(\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۳) - \frac{۳}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا} + ۱}{\sqrt{۲}}$

(۸) $\int \frac{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \text{لوک}(\text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱) + \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{۲\text{لا} - ۱}{\sqrt{۳}}$

(۹) $\int \frac{\text{لا} + ۱}{(\text{لا} - ۱)^{۲}}\,\text{فرلا} = \text{لوک}(\text{لا} - ۱) - \frac{۲}{\text{لا} - ۱}$

(۱۰) $\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} + ۶\text{لا} + ۸} = \text{لوک}\,\frac{(\text{لا} + ۴)^{۲}}{\text{لا} + ۲}$

(۱۱) $\int \frac{\text{لا}^{۲} - ۱}{(\text{لا} - ۲)(\text{لا} - ۳)}\,\text{فرلا} = \text{لا} - ۳\,\text{لوک}(\text{لا} - ۲) + ۸\,\text{لوک}(\text{لا} - ۳)$

(۱۲) $\int \frac{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} - \text{لا} - ۱}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \left(\frac{۳}{۵}\sqrt{۵} + ۱\right)\text{لوک}(۲\text{لا} - \sqrt{۵} - ۱) - \left(\frac{۳}{۵}\sqrt{۵} - ۱\right)\text{لوک}(۲\text{لا} + \sqrt{۵} - ۱)$

(۱۳) $\int \frac{۱ - \text{لا}^{۲\text{م}}}{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲\text{م} - ۱}\,\text{لا}^{۲\text{م} - ۱}$

(۱۴) $\int \frac{۱ - (-۱)^{\text{م}}\,\text{لا}^{۲\text{م}}}{۱ + \text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا} = \text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۵}\text{لا}^{۵} - \cdots + (-۱)^{\text{م} - ۱} \times \frac{۱}{۲\text{م} - ۱} \times \text{لا}^{۲\text{م} - ۱}$

امثلہ ۲۶

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ - ۳\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,\text{لا}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ + ۳\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جبز}^{-۱}\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,\text{لا}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(۱ - \text{لا})}} = \text{جب}^{-۱}(۲\text{لا} - ۱)$

(۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{لا}+۱)}} = \text{جمز}^{-۱}(۲\text{لا}+۱)$

(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{لا}-۱)}} = \text{جمز}^{-۱}(۲\text{لا}-۱)$

۱۹۵

(۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱+۲\text{لا}+۳\text{لا}^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جبز}^{-۱}\frac{۳\text{لا}+۱}{\sqrt{۲}}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱+۲\text{لا}-۳\text{لا}^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۳\text{لا}-۱}{۲}$

(۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲\text{ا}\,\text{لا}-\text{لا}^۲}} = \text{جم}^{-۱}\left(۱-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)$

(۹) $\int \sqrt{\frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \sqrt{\text{لا}(\text{ا}-\text{لا})} + \frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\frac{۲\text{لا}-\text{ا}}{\text{ا}}$

(۱۰) $\int \sqrt{\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \text{جب}^{-۱}\text{لا} - \sqrt{۱-\text{لا}^۲}$

(۱۱) $\int \sqrt{\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}}\,\text{فرلا} = \sqrt{\text{لا}^۲-۱} + \text{جمز}^{-۱}\text{لا}$

امثلہ ۲۷

متغیر کی تبدیلی

(۱) $\int \frac{\text{لا}^۲\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^۳} = \frac{۱}{۳}\,\text{لوک}\frac{۱}{۱-\text{لا}^۳}$

(۲) $\int \frac{\text{لا}^۲\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^۶} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\frac{۱+\text{لا}^۳}{۱-\text{لا}^۳}$ ، $\int \frac{\text{لا}^۲\,\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^۶} = \frac{۱}{۳}\,\text{مس}^{-۱}\text{لا}^۳$

(۳) $\int \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}(\text{لوک لا})^۲$

(۴) $\int \text{جب لا جم لا فر لا} = \frac{1}{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{لا}$

(۵) $\int \frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^{2}}}\,\text{فر لا} = \frac{1}{2}\left(\text{جب}^{-1}\text{لا}\right)^{2}$

(۶) $\int \frac{\text{جم لا}}{1+\text{جب لا}}\,\text{فر لا} = \text{لوک}\left(1+\text{جب لا}\right)$،

$\int \frac{\text{جب لا}}{\text{ا}+\text{ب جم لا}} = -\frac{1}{\text{ب}}\,\text{لوک}\left(\text{ا}+\text{ب جم لا}\right)$

(۷) $\int \text{جب لا جم}^{3}\,\text{لا فر لا} = -\frac{1}{4}\,\text{جم}^{4}\,\text{لا}$

(۸) $\int \frac{\text{جب لا جم لا}}{\text{ا جم}^{2}\text{لا}+\text{ب جب}^{2}\text{لا}}\,\text{فر لا} = \frac{1}{2(\text{ب}-\text{ا})}\,\text{لوک}\left(\text{ا جم}^{2}\text{لا}+\text{ب جب}^{2}\text{لا}\right)$

(۹) $\int \text{مس}^{3}\,\text{لا فر لا} = \frac{1}{2}\,\text{مس}^{2}\,\text{لا} + \text{لوک جم لا}$

(۱۰) $\int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^{5}\,\text{لا}}\,\text{فر لا} = \frac{1}{4}\,\text{قط}^{4}\,\text{لا}$

(۱۱) $\int \text{قط}^{4}\,\text{لا فر لا} = \text{مس لا} + \frac{1}{3}\,\text{مس}^{3}\,\text{لا}$

(۱۲) $\int \left(\text{قط لا}+\text{مس لا}\right)\text{فر لا} = \text{لوک}\,\frac{1}{1-\text{جب لا}}$ ،

$\int \left(\text{قط لا}-\text{مس لا}\right)\text{فر لا} = \text{لوک}\left(1+\text{جب لا}\right)$

(۱۳) $\int \frac{\text{فر لا}}{1+\text{جم لا}} = \text{قم لا} - \text{مم لا}$ ، $\int \frac{\text{فر لا}}{1-\text{جم لا}} = -\text{مم لا} - \text{قم لا}$

(۱۴) $\int \frac{\text{فر لا}}{1+\text{جب لا}} = \text{مس لا} - \text{قط لا}$ ، $\int \frac{\text{فر لا}}{1-\text{جب لا}} = \text{مس لا} + \text{قط لا}$

۱۹۶

(۱۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^2\text{لا}\;\text{جم}^2\text{لا}} = \text{مس لا} - \text{مم لا}$

(۱۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}\;\text{جم}^2\text{لا}} = \text{قط لا} + \text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

(۱۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا}\;\text{جم}^3\text{لا}} = \frac{۱}{۲}\,\text{قط}^2\text{لا} + \text{لوک مس لا}$

(۱۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{مس لا}} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{جم لا} + \text{جب لا})$

(۱۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{جم}^2\text{لا}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس لا}\right)$

(۲۰) $\int \text{لا}\,\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\,(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{۳}{۲}}$

(۲۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(\text{لا}^{\text{ن}}+۱)} = \frac{۱}{\text{ن}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}+۱}$

(۲۲) زایدی ابدالوں سے $\int \sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\;\text{فرلا}$ اور $\int \sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}\;\text{فرلا}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2\sqrt{\text{لا}^2+۱}} = -\frac{\sqrt{۱+\text{لا}^2}}{\text{لا}}$

(۲۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} = -\frac{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}{\text{ا}^2\,\text{لا}}$

(۲۵) $\int \frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}} = \frac{۱}{۳}\,(\text{لا}^2-۲\text{ا}^2)\sqrt{\text{ا}^2+\text{لا}^2}$

امثلہ ۲۸
تکمل بالحصص

(۱) $\int$ لا ھو^{لا} فرلا = ۱ (لا - ۱) ھو^{لا}

(۲) $\int$ لا لوک لا فرلا = $\frac{۱}{۲}$ لا^{۲} (لوک لا - $\frac{۱}{۲}$)

(۳) $\int$ لا^{م} لوک لا فرلا = $\frac{\text{لا}^{م+۱}}{م+۱}$ (لوک لا - $\frac{۱}{م+۱}$)

(۴) $\int$ لا جب لا فرلا = - لا جم لا + جب لا

(۵) $\int$ لا جم لا فرلا = لا جب لا + جم لا

(۶) $\int$ لا جب لا جم لا فرلا = - $\frac{۱}{۴}$ لا جم ۲لا + $\frac{۱}{۸}$ جب ۲لا

۱۹۷

(۷) $\int$ جم م لا جم ن لا فرلا = $\frac{\text{م جب م لا جم ن لا - ن جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۸) $\int$ جب م لا جب ن لا فرلا = $\frac{\text{ن جب م لا جم ن لا - م جم م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۹) $\int$ جب م لا جم ن لا فرلا = - $\frac{\text{م جم م لا جم ن لا + ن جب م لا جب ن لا}}{\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲}}$

(۱۰) $\int$ جب$^{-۱}$ لا فرلا = لا جب$^{-۱}$ لا + $\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

(۱۱) $\int$ مس$^{-۱}$ لا فرلا = لا مس$^{-۱}$ لا - لوک $\sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}$

(۱۲) $\int$ قط$^{-۱}$ لا فرلا = لا قط$^{-۱}$ لا - جمز$^{-۱}$ لا

(۱۳) $\int$ لا سس$^{-1}$ لا فرلا = $\frac{1}{2}$(۱ + لا^{2}) سس$^{-1}$ لا − $\frac{1}{2}$ لا

(۱۴) $\int$ لا قط^{2} لا فرلا = لا سس لا + لوک جم لا

(۱۵) $\int \frac{\text{لا + جب لا}}{\text{۱ + جم لا}}$ فرلا = لا سس $\frac{\text{لا}}{2}$

(۱۶) $\int \frac{\text{لا جب}^{-1}\text{ لا فرلا}}{\sqrt{\text{۱ − لا}^{2}}}$ = − $\sqrt{\text{۱ − لا}^{2}}$ جب$^{-1}$ لا + لا

(۱۷) $\int$ جمز لا جم لا فرلا = $\frac{1}{2}$ (جبز لا جم لا + جمز لا جب لا)

(۱۸) $\int$ جبز لا جب لا فرلا = $\frac{1}{2}$ (جمز لا جب لا − جبز لا جم لا)

(۱۹) $\int$ جمز لا جب لا فرلا = $\frac{1}{2}$ (جبز لا جب لا − جمز لا جم لا)

(۲۰) $\int$ جبز لا جم لا فرلا = $\frac{1}{2}$ (جمز لا جم لا + جبز لا جب لا)

(۲۱) $\int$ قو$^{\text{لا}}$ جب لا جم لا فرلا = $\frac{1}{10}$ (جب ۲ لا − ۲ جم ۲ لا) قو$^{\text{لا}}$

(۲۲) $\int$ لا^{5} قو$^{\text{−لا}}$ فرلا = − (لا^{5} + ۵ لا^{4} + ۲۰ لا^{3} + ۶۰ لا^{2} + ۱۲۰ لا + ۱۲۰) قو$^{\text{−لا}}$

(۲۳) $\int$ لا^{4} جب لا فرلا = − (لا^{4} − ۱۲ لا^{2} + ۲۴) جم لا + (۴ لا^{3} − ۲۴ لا) جب لا

(۲۴) اگر ع$_{\text{ن}}$ = $\int$ لا$^{\text{ن}}$ جمز لا فرلا اور و$_{\text{ن}}$ = $\int$ لا$^{\text{ن}}$ جبز لا فرلا

تو ثابت کرو کہ ع$_{\text{ن}}$ = لا$^{\text{ن}}$ جبز لا − ن و$_{\text{ن−۱}}$ اور و$_{\text{ن}}$ = لا$^{\text{ن}}$ جمز لا − ن ع$_{\text{ن−۱}}$

اس کی مدد سے ع$_{4}$ اور و$_{4}$ کی قیمتیں دریافت کرو

[ع$_{4}$ = (لا^{4} + ۱۲ لا^{2} + ۲۴) جبز لا − (۴ لا^{3} + ۲۴ لا) جمز لا

و$_{4}$ = (لا^{4} + ۱۲ لا^{2} + ۲۴) جمز لا − (۴ لا^{3} + ۲۴ لا) جبز لا]

(۲۵) اگر ع تغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

$$\int قو^{لا} \times ع\, فر لا = \frac{قو^{لا}}{ل} \left(ا - \frac{عف}{ل} + \frac{عف^۲}{ل^۲} - \dots \right) ع \text{ جہاں } عف = \frac{فر}{فر لا}$$

(۲۶) سروں ا اور ب کی قیمت دریافت کرو کہ

$$\int \frac{فر لا}{(ا + ب جم لا)^۲} = \frac{ا جب لا}{ا + ب جم لا} + ب \int \frac{فر لا}{ا + ب جم لا}$$

$$\left[ا = \frac{-ب}{ا^۲ - ب^۲} ، ب = \frac{ا}{ا^۲ - ب^۲} \right]$$

۱۹۸

امثلہ ۲۹

(منطق کسور)

(۱) $\int \frac{فر لا}{لا (ا - لا^۲)} = لوک \frac{لا}{\sqrt{ا - لا^۲}}$

(۲) $\int \frac{۲ لا + ۳}{لا (لا - ۱)(لا + ۲)} فر لا = لوک \frac{(لا - ۱)^{\frac{۵}{۳}}}{لا^{\frac{۳}{۲}} (لا + ۲)^{\frac{۱}{۶}}}$

(۳) $\int \frac{لا^۲ فر لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)} = \frac{۱}{۲} لوک (لا - ۱) - ۴ لوک (لا - ۲) + \frac{۹}{۲} لوک (لا - ۳)$

(۴) $\int \frac{۲ لا - ۳}{(لا^۲ - ۱)(۲ لا + ۳)} فر لا = \frac{۵}{۲} لوک (لا + ۱) - \frac{۱}{۱۰} لوک (لا - ۱) - \frac{۱۲}{۵} لوک (۲ لا + ۳)$

(۵) $\int \frac{لا فر لا}{لا^۴ - لا^۲ - ۲} = \frac{۱}{۶} لوک \frac{لا^۲ - ۲}{لا^۲ + ۱}$

(۶) $\int \frac{فر لا}{لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۴} = \frac{۱}{۳ (لا + ۲)} + \frac{۱}{۹} لوک \frac{لا - ۱}{لا + ۲}$

(۷) $\int \frac{لا^۲ فر لا}{(لا - ا)(لا - ب)(لا - ج)} = \frac{ا^۲}{(ا - ب)(ا - ج)} لوک (لا - ا)$

$$+\frac{\text{ب}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ب})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})}+\frac{\text{ج}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}-\text{ج})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$$

(۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{\text{ب}^2-\text{ا}^2}\left(\frac{1}{\text{ا}}\,\text{سن}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\frac{1}{\text{ب}}\,\text{سن}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۹) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{2(\text{ب}^2-\text{ا}^2)}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}^2+\text{ا}^2}{\text{لا}^2+\text{ب}^2}$$

(۱۰) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\left(\text{ا}\,\text{سن}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}-\text{ب}\,\text{سن}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)$$

(۱۱) $$\int\frac{\text{لا}^3\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)}=\frac{1}{2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)}\left\{\text{ا}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ا}^2)-\text{ب}^2\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2+\text{ب}^2)\right\}$$

(۱۲) $$\int\frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)^2}=-\frac{2}{\text{لا}+2}+\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+2}{\text{لا}+1}$$

(۱۳) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)^2}=\frac{4}{\text{لا}+2}+\text{لوک}\,(\text{لا}+1)$$

(۱۴) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^3-\text{لا}^2-\text{لا}+1}=\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\text{لا}-1}$$

(۱۵) $$\int\frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}+\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

(۱۶) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1-\text{لا})^2}=\frac{2\text{لا}-1}{\text{لا}(1-\text{لا})}+2\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{1-\text{لا}}$$ ۱۹۹

(۱۷) $$\int\frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}-\frac{1}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

(۱۸) $$\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1)^2}=-\frac{3}{4}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-1}{\text{لا}+1}-\frac{1}{\text{لا}}-\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1}$$

(۱۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۳}(\text{لا}+۱)} = -\frac{۱}{۲\,\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\text{لا}} - \text{لوک}(\text{لا}+۱) + \text{لوک لا}$$

(۲۰) $$\int \frac{۳\,\text{لا}+۲}{\text{لا}(\text{لا}+۱)^{۳}}\,\text{فرلا} = ۲\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{لا}+۱} + \frac{۲}{\text{لا}+۱} - \frac{۱}{۲(\text{لا}+۱)^{۲}}$$

(۲۱) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۳}} = \frac{۳}{۱۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۳}{۸}\times\frac{\text{لا}}{\text{لا}^{۲}-۱} - \frac{۱}{۴}\times\frac{\text{لا}}{(\text{لا}^{۲}-۱)^{۲}}$$

(۲۲) $$\int \frac{۱+\text{لا}}{\text{لا}(۱+\text{لا}^{۲})}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}} + \text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۴) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱-\text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{(۱+\text{لا})^{۲}}{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۶) $$\int \frac{\text{لا فرلا}}{۱+\text{لا}^{۳}} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{۱-\text{لا}+\text{لا}^{۲}}{(۱+\text{لا})^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{۲\,\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}$$

(۲۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(۱+\text{لا}) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}(۱+\text{لا}^{۲}) + \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۸) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(۱+\text{لا}) + \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}(۱+\text{لا}^{۲}) - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$$

(۲۹) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+\text{لا}^{۲}-۲} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{\sqrt{۲}}{۳}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}}{\sqrt{۲}}$$

(۳۰) $$\int \frac{\text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}+۳\,\text{لا}^{۲}+۲} = \text{لوک}(\text{لا}^{۲}+۲) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(\text{لا}^{۲}+۱)$$

(۳۱) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)^{۲}(\text{لا}^{۲}+۱)} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}(\text{لا}^{۲}+۱) - \frac{۱}{۲(\text{لا}-۱)}$$

(۳۲) $\int \frac{\text{لا}^{۲} - ۱}{\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} + ۱} \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} \frac{\text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۱}{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}$

(۳۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}(۱ + \text{لا}^{۲})} = \text{مس}^{-۱}\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{۳\,\text{لا}^{۳}}$

(۳۴) $\int \frac{\text{لا}^{۳}\,\text{فرلا}}{(۱ + \text{لا}^{۲})^{۳}} = - \frac{۱ + ۲\,\text{لا}^{۲}}{۴(۱ + \text{لا}^{۲})^{۲}}$

(۳۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}(۱ + \text{لا}^{۲})^{۲}} = - \frac{۲ + ۳\,\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{لا}(۱ + \text{لا}^{۲})} - \frac{۳}{۲} \text{مس}^{-۱}\text{لا}$ ۲۰۰

(۳۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱ + \text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \text{لوک} \frac{۱ + \sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}}{۱ - \sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

$+ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \text{مس}^{-۱} \frac{\sqrt{۲}\,\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$

(۳۷) $\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{۱ + \text{لا}^{۴}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \text{لوک} \frac{۱ - \sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}}{۱ + \sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

$+ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \text{مس}^{-۱} \frac{\sqrt{۲}\,\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$

امثلہ ۳۰

(غیر منطق تفاعل)

(۱) $\int \text{لا} \sqrt{۱ + \text{لا}}\; \text{فرلا} = \frac{۲}{۵} \times (۱ + \text{لا})^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۲}{۳} (۱ + \text{لا})^{\frac{۳}{۲}}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا} + \text{ا}} + \sqrt{\text{لا} + \text{ب}}} = \frac{۲}{۳(\text{ا} - \text{ب})} \left\{ (\text{لا} + \text{ا})^{\frac{۳}{۲}} - (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{۳}{۲}} \right\}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱ - \sqrt{\text{لا}}} = ۲\sqrt{\text{لا}} + ۲\,\text{لوک}\,(۱ - \sqrt{\text{لا}})$

(۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا})\sqrt{\text{لا}}} = \text{لوک}\ \frac{\text{۱}+\sqrt{\text{لا}}}{\text{۱}-\sqrt{\text{لا}}}$$

(۵) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = \sqrt{\text{۲}}\ \text{مستر}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۱}+\text{لا}}{\text{۲}}}$$

(۶) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا})\sqrt{\text{۱}-\text{لا}}} = -\sqrt{\text{۲}}\ \text{مستر}^{-\text{۱}} \sqrt{\frac{\text{۱}-\text{لا}}{\text{۲}}}$$

(۷) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}} = \text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}\right) - \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۳}}}\ \text{مستر}^{-\text{۱}} \frac{\text{۲}\sqrt{\text{لا}-\text{۱}}+\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$$

(۸) $$\int \frac{\sqrt{\text{لا}}}{\text{لا}-\text{۱}}\ \text{فرلا} = \text{۲}\sqrt{\text{لا}} + \text{لوک}\ \frac{\sqrt{\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = \text{لوک}\ \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۱۰) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}} = -\frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}{\text{لا}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لوک}\ \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+\text{۱}}$$

(۱۱) $$\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{جبتر}^{-\text{۱}}\ \text{لا}$$

(۱۲) $$\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}}\ \text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}} = -\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}} + \text{جبتر}^{-\text{۱}}\ \text{لا}$$

(۱۳) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\ \text{مستر}^{-\text{۱}} \frac{\sqrt{\text{۲}}\ \text{لا}}{\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}}$$

(۱۴) $$\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}\ \text{لوک}\ \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}+\sqrt{\text{۲}}\ \text{لا}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}}}-\sqrt{\text{۲}}\ \text{لا}}$$

۲۰۱

ساتواں باب

محدود تکملے

۷۸ - **تمہید - رقبوں کا سوال** - تکمل کے سوال کا جو مفہوم اب ہم بیان کرینگے اس کے لحاظ سے یہ سوال بہت قدیم ہے لیکن اس کے حل کا عام طریقہ حال میں ہی نیوٹن اور لیب نیز کے وقت میں حاصل ہوا - اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں اس طریقہ کو منطقی تفصیلات میں جانے کے بغیر مختصر طور پر بیان کیا جائیگا اور یہ مان لیا جائیگا کہ "رقبوں کا سوال" کافی طور پر اس طریقہ کی تمثیلی صورت ہے - اس طرح اصل اصول آسانی سے سمجھ میں آجائیگا - اسکے بعد دفعات ۸۹ تا ۹۴ میں اس سوال پر نئے سرے سے زیادہ عام اور دقیق نقطۂ نظر سے بحث کی جائے گی -

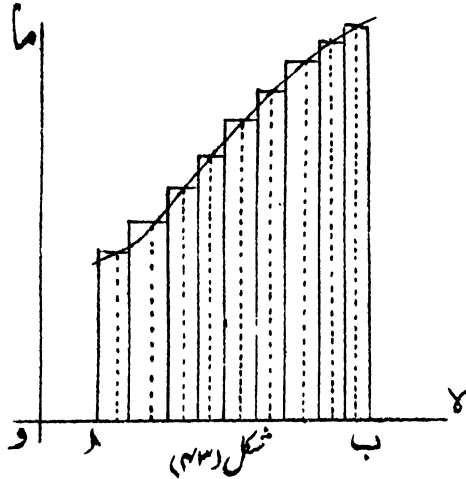
فرض کرو کہ وہ رقبہ* دریافت کرنا مطلوب ہے جو سلسل منحنی

ما = فما (لا) .... (۱)

محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے - تعیین کی خاطر یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ ما، لا کی سعت زیر بحث میں مثبت ہے اور ب > ا - اس سعت ب - ا کو ہم ذیلی حصوں ھ۱، ھ۲، ..... ھن

* اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں لفظ "رقبہ" کو عام وجدانی یا عقلی مفہوم کے مطابق لیا جائے گا جدید نقطہ نظر سے رقبہ کی نئی تعریف ضروری ہے - دیکھو دفعہ ۹۹ -

میں تقسیم کرتے اور ان کو قاعدے مان کر مستطیلوں کا ایک سلسلہ بناتے ہیں جن کے ارتفاع ترتیب وار ما، ما، ما۔۔۔۔۔ مان منحنی کے ایسے معین ہیں

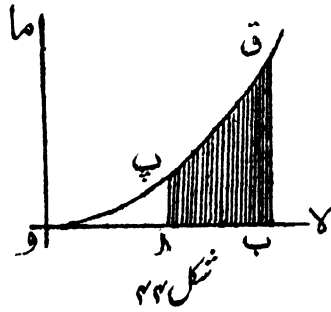
شکل (۴۳)

جنہیں مختلف قاعدوں کے اندر کسی اختیاری نقطوں سے منحنی تک کھینچا گیا ہے اس طور پر جو مستطیل بنائے جائیں ان کے رقبوں کا مجموعہ رقبہ مطلوبہ کا ایک تقرب ہوگا۔ ممکن ہے کہ یہ تقرب رقبہ کو صحیح طور پر تعبیر کرے لیکن یہ ظاہر ہے کہ ذیلی حصوں ھ، ھ، ھ۔۔۔۔۔ ھن کو جتنا چھوٹا لیا جائیگا یعنی تقسیم کے حصوں کی متناظر تعداد جسقدر زیادہ ہوگی اتنا ہی یہ تقرب بہتر ہوگا۔ ان مستطیلوں کے مجموعہ کی انتہا جبکہ حصوں کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے مطلوبہ رقبہ ہوگا۔

احصا کی ایجاد سے پہلے اسی طرح کا عمل یا اسکے مرادف کوئی اور عمل ہر منحنی کے لئے بشرط امکان الگ طور پر کیا جاتا تھا' اکثر اوقات یہ طریقے نہایت فہیم اور خوش فکر ہوا کرتے تھے۔ ذیل کی مثالیں بطور توضیح کے دیجاتی ہیں۔

مثال ۱۔ جو رقبہ مکافی ما = لا^۲^، محور لا اور معینوں لا = ا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔

شکل ۴۴

رکھو $ه_1 = ه_2 = ه_3 = \dots = ه_ن = ه$ تو

$ما_1 = ا^2$، $ما_2 = (ا + ه)^2$، $ما_3 = (ا + 2ه)^2$، ..... $ما_ن = \{ا + (ن-1)ه\}^2$

ہمیں ذیل کے مجموعہ پر غور کرنا ہے

$$ا^2 ه + (ا+ه)^2 ه + (ا+2ه)^2 ه + \dots + \{ا + (ن-1) ه\}^2 ه$$

$$= ن ا^2 ه + 2\{1 + 2 + \dots + (ن-1)\} ا ه^2 + \{1^2 + 2^2 + \dots + (ن-1)^2\} ه^3$$

$$= ن ا^2 ه + ن(ن-1) ا ه^2 + \frac{1}{6}(ن-1) ن (2ن-1) ه^3$$

$$= ا^2(ب-ا) + (1 - \frac{1}{ن}) ا (ب-ا)^2 + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{ن})(1 - \frac{1}{2ن})(ب-ا)^3 \quad ......(2)$$

جب، ن مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو اسکی انتہائی قیمت ہوتی ہے

$$ا^2(ب-ا) + ا(ب-ا)^2 + \frac{1}{3}(ب-ا)^3 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}(ب^3 - ا^3) \quad ....(3)$$

۲۰۳ **مثال ۲۔** منحنی کی عام صورت $ما = لا^م$ .... (۴) جہاں م کی کوئی صحیح یا مکسور قیمت، مثبت یا منفی سوائے -1 کے ہو اس طور پر بحث میں آسکتی ہے۔ سعت (ب - ا) کے نقاط تقسیم کے فصلوں کو حسابی سلسلہ میں لینے کی بجائے جیسے عام طور پر لیا جاتا ہے ہندسی سلسلہ میں تقسیم کرتے ہیں، اس طرح فصلے یہ ہوتے ہیں

$ا$، $مہ ا$، $مہ^2 ا$، ..... $مہ^ن ا$ جہاں $مہ^ن = \frac{ب}{ا}$

ذیلی حصے یہ ہونگے

$\text{ھ}_۱ = (\text{مہ} - ۱)\,\text{ا}،\ \text{ھ}_۲ = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}\,\text{ا}،\ \text{ھ}_۳ = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}^۲\,\text{ا} \ldots\ \text{ھ}_\text{ن} = (\text{مہ} - ۱)\,\text{مہ}^{\text{ن}-۱}\,\text{ا}$

ان حصوں کے شروع کے نقطوں پر کے معین ہیں $\text{ا}^\text{م}،\ \text{مہ}^\text{م}\,\text{ا}^\text{م}،\ \text{مہ}^{۲\text{م}}\,\text{ا}^\text{م}،\ \ldots\ \text{مہ}^{(\text{ن}-۱)\text{م}}\,\text{ا}^\text{م}$

اور مجموعہ زیر بحث یہ ہے

$$(\text{مہ}-۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱}\left\{۱ + \text{مہ}^{\text{م}+۱} + \text{مہ}^{۲(\text{م}+۱)} + \ldots\ldots + \text{مہ}^{(\text{ن}-۱)(\text{م}+۱)}\right\}$$

$$= (\text{مہ}-۱)\,\text{ا}^{\text{م}+۱}\,\frac{\text{مہ}^{\text{ن}(\text{م}+۱)} - ۱}{\text{مہ}^{\text{م}+۱} - ۱} = \frac{\text{مہ}-۱}{\text{مہ}^{\text{م}+۱}-۱}\left(\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}\right) \ldots\ldots(۵)$$

مہ کو انتہا ایک کی طرف لانے سے ان چھوٹے حصوں کو لا انتہا کم کر دیا جا سکتا ہے، اور ن لامتناہی ہو جاتا ہے۔ اب چونکہ دفعہ ۲۲ کی رو سے

$$\text{نہا}_{\text{مہ}\to۱}\ \frac{\text{مہ}^{\text{م}+۱} - ۱}{\text{مہ} - ۱} = \text{م} + ۱ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(۶)$$

نتیجہ یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب}^{\text{م}+۱} - \text{ا}^{\text{م}+۱}}{\text{م} + ۱} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(۷)$$

اگر اس میں رکھیں م = ۲ تو اوپر کی مثال ا کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

اوپر کا ذکی طرز عمل انگریزی ریاضی داں **والس** (۱۶۵۶) کا ہے، اس میں ترمیم کی ضرورت ہے جبکہ م = −۱، اس صورت میں (۵) کی بجائے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ن}(\text{مہ}-۱) = \text{ن}\left\{\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\frac{۱}{\text{ن}}} - ۱\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(۸)$$

اس کی انتہا جبکہ $\text{ن} \to \infty$ دفعہ ۴۳(۹) کی رو سے ہے $\text{لوک}\ \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ......(۹)

مثال ۲۔ فرض کرو کہ منحنی ما = جب لا ......(۱۰) ہے اور سعت لا = عا سے لا = با تک ہے مساوی ذیلی حصے لینے سے $\text{ھ} = \frac{\text{با} - \text{عا}}{\text{ن}}$ ......(۱۱)

ذیل کے مجموعہ کی انتہا پر غور کرنا ہوگا

$$\Sigma = \{ \text{جب} (\text{عا} + \frac{\text{ھ}}{۲}) + \text{جب} (\text{عا} + \frac{۳}{۲}\text{ھ}) + \ldots + \text{جب} (\text{با} - \frac{۳}{۲}\text{ھ})$$

$$+ \text{جب} (\text{با} - \frac{\text{ھ}}{۲}) \} \text{ھ} \ldots\ldots (۱۲)$$

۲۰۴ جہاں ہر وقفہ کے وسط پر جب لا کی قیمتیں لی گئی ہیں۔ اب

$$\frac{\text{جب} \frac{\text{ھ}}{۲}}{\frac{\text{ھ}}{۲}} \Sigma = ۲\,\text{جب} \frac{\text{ھ}}{۲} \text{جب} (\text{عا} + \frac{\text{ھ}}{۲}) + ۲\,\text{جب} \frac{\text{ھ}}{۲} \text{جب} (\text{عا} + \frac{۳}{۲}\text{ھ})$$

$$+ \ldots + ۲\,\text{جب} \frac{\text{ھ}}{۲} \text{جب} (\text{با} - \frac{۳}{۲}\text{ھ}) + ۲\,\text{جب} \frac{\text{ھ}}{۲} \text{جب} (\text{با} - \frac{\text{ھ}}{۲})$$

$$= \text{جم}\,\text{عا} - \text{جم} (\text{عا} + \text{ھ})$$

$$+ \text{جم} (\text{عا} + \text{ھ}) - \text{جم} (\text{عا} + ۲\text{ھ})$$

. . . .

$$\text{جم} (\text{با} - ۲\text{ھ}) - \text{جم} (\text{با} - \text{ھ})$$

$$+ \text{جم} (\text{با} - \text{ھ}) - \text{جم}\,\text{با}$$

$$= \text{جم}\,\text{عا} - \text{جم}\,\text{با} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

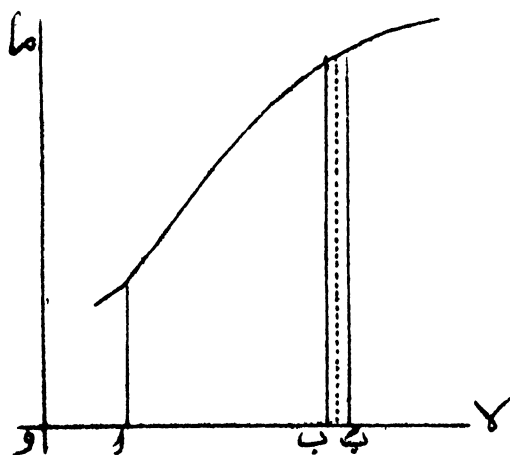
اس لئے انتہا کی طرف گذرنے سے (ھ ← ۰) مطلوبہ رقبہ ہے

$$\text{جم}\,\text{عا} - \text{جم}\,\text{با} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

۸۸۔ مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق ۔ اوپر کی طرح کے حسابات تکملی احصا کے قاعدہ کی مدد سے عمل میں لائے جاتے ہیں۔ اسکی طرف اب ہم متوجہ ہوتے ہیں اگر ا کو ثابت رکھا جائے اور ب کو بدلا جائے تو دفعہ ۸۶ کا رقبہ ب کا تفاعل ہے اور یہ تفاعل صفر ہوتا ہے جبکہ ب = ا ۔ اگر ب کو صغاری اضافہ مف ب دیا جائے تو رقبہ کا اضافہ آخرالامر ایک مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوگا جس کا عرض مف ب اور ارتفاع فا (ب) ہے (دیکھو دفعہ ۴۵)۔ پس اگر رقبہ زیر بحث ق ہو تو

$$\text{مف}\,\text{ق} = \text{فا} (\text{ب})\,\text{مف}\,\text{ب} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

یا $\frac{\text{ف ر ق}}{\text{ف ر ب}}$ = فہ (ب) .... (۲)

ما
و ر ب بَ لا

شکل ۴۵

اگر پہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہو کہ پہَ (لا) = فہ (لا) یعنے پہ (لا)، فہ (لا) کا "نامحدود تکملہ" ہو تو

$\frac{\text{ف ر ق}}{\text{ف ر ب}}$ = پہَ (ب) .... (۳)

دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ

ق = پہ (ب) + م .... (۴)

جہاں م مستقل ہے اور چونکہ ق صفر ہوتا ہے ب = ر کے لئے اسلئے لازماً ہونا چاہیئے م = ـ پہ (ر)، پس ق = پہ (ب) ـ پہ (ر) ... (۵)
گویا رقبہ معلوم کرنے کا سوال اس طرح نامحدود تکمل کے سوال میں بدل گیا جس پہ گزشتہ باب میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = $\text{لا}^{م}$ تو پہ (لا) = $\frac{\text{لا}^{م+۱}}{م+۱}$ اور

$$\text{ق} = \frac{\text{ب}^{\text{م}+1} - \text{ل}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1}$$ سوائے اس صورت کے جبکہ م = −۱

اگر فا (لا) = $\frac{1}{\text{لا}}$ تو پا (لا) = لوک لا اور ق = لوک $\frac{\text{ب}}{\text{ل}}$ ....(۷)

مثال ۲۔ اگر فا (لا) = جب لا تو پا (لا) = −جم لا
اور ق = −جم ب − (−جم ل) = جم ل − جم ب ......(۸)

یہ نتائج ان کے مطابق ہیں جو دفعہ ۸۷ میں بڑی محنت اور طول عمل کے ساتھ حاصل ہوئے

۸۹ ۔ تکملہ کی عام تعریف ۔ ترقیم: ۔ چھوٹی یا صغاری مقداروں کے ایک سلسلہ کی انتہائی قیمت دریافت کرنے کا عمل ایسا ہے جس کے علم ہندسہ اور علم عمل میں بیشمار استعمال اور اطلاق ہیں ۔ اب ہم اس پر باضابطہ طور پر بحث کرینگے اور ساتھ ہی اُن امور کی طرف توجہ کرینگے جو محض نظری اہمیت رکھتے ہیں اور جن سے ابتک قطع نظر کی گئی ہے ۔

فرض کروکہ ما = فا (لا)، لا کا تفاعل ہے اور اسکو ہم معلوم (اور اسلئے محدود) فرض کرتے ہیں ل سے ب تک (بشمول طرفین) لا کی تمام قیمتوں کے لئے ۔ فرض کروکہ سعت ب − ل کو وقفوں

$$\text{ھ}_1،\ \text{ھ}_2،\ \text{ھ}_3،\ \ldots\ldots\ \text{ھ}_{\text{ن}} \qquad \ldots\ldots(1)$$

کی کسی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے، ان سب وقفوں کی ایک ہی علامت ہے اور

$$\text{ھ}_1 + \text{ھ}_2 + \text{ھ}_3 + \ldots\ldots + \text{ھ}_{\text{ن}} = \text{ب} - \text{ل} \qquad \ldots\ldots(2)$$

۲۰۶ فرض کروکہ ما کی ایک قیمت ما_1 ہے جو ما وقفہ ھ_1 میں اختیار کرتا ہے اور ما_2 ایک قیمت ہے جو یہ وقفہ ھ_2 میں اختیار کرتا ہے، علیٰ ہذالقیاس اور فرض کروکہ

$$\Sigma = \text{ما}_1\text{ھ}_1 + \text{ما}_2\text{ھ}_2 + \ldots\ldots + \text{ما}_{\text{ن}}\text{ھ}_{\text{ن}} \qquad \ldots\ldots(3)$$

اس حاصل جمع کی قیمت عام طور پر ایک توسعت ب - ا کے طریقہ تقسیم کے ساتھ بدلیگی اور دوسرے ان مختلف وقفوں (۱) کے اندر قیمتوں

فا۱، فا۲، فا۳، ...... فان کے انتخاب پر۔ لیکن اگر یہ شرط عائد کر دیجائے

کہ ان میں سے کوئی وقفہ بھی ایک مقررہ مقدار ک سے تجاوز نہیں کر سکتا تو بعض صورتوں میں ہم دیکھینگے [اور ان صورتوں میں اکثر ایسے تفاعلوں سے نمونے شامل ہونگے جن سے احصا کے استعمال کی ضمن میں واسطہ پڑتا ہے (اور کئی اور)] کہ ح کی قیمت ک کے کم ہونے کے ساتھ ایک معین انتہائی قیمت س کی طرف اس طور پر مائل ہوتی ہے کہ ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین ہو سکتا ہے کہ ح کا تفاوت س سے کسی چھوٹی سے چھوٹی مقررہ مقدار کی نسبت کم ہوگا۔

جس مجموعہ کو ح سے تعبیر کیا گیا ہے اسے زیادہ تفصیل سے یوں بیان کر سکتے ہیں

ح ا^ب وا مف لا یا ح ا^ب فہ (لا) مف لا ...... (۴)

جہاں مف لا کو لا کے اضافوں ھ۱، ھ۲، ...... ھن کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔ جب اضافے مف لا تمام لا انتہا چھوٹے ہوتے ہیں اور اس لئے انکی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے تو اس انتہائی قیمت کو (جبکہ اسکا وجود ہو) جسکی طرف یہ مجموعہ مستدق ہوتا ہے حدود ا اور ب کے درمیان فہ (لا) کا "محدود تکملہ" کہتے ہیں، اسے ہم

∫ ا^ب وا فر لا یا ∫ ا^ب فہ (لا) فر لا ...... (۵) [$\int_a^b y\,dx$]

سے تعبیر کرینگے اس ترقیم کو اختیار کرنے سے ٹل کی وہ منزلیں جن سے

انتہائی قیمت حاصل کی گئی تھی پیش نظر رہتی ہیں۔ +

ایسے سوالات جن میں (۳) جیسے مجموعہ کی انتہائی قیمت مطلوب ہوتی ہے علم ریاضی کی تقریباً ہر شاخ میں پائے جاتے ہیں۔ منحنی کے رقبہ پر پہلے بحث کی گئی ہے۔ اور دیگر سادہ مثالیں یہ ہیں۔ قوس کا طول جسے اندرونی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا خیال کیا جائے، گردشی مجسم کا حجم وغیرہ۔ آٹھویں باب میں ان پر خاص طور پر بحث کی جائے گی۔

حرکیات میں 'متغیر قوت کے دھکے (Impulse) کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ وقت کے کسی وقفہ میں قوت کا "زمانی تکملہ" ہے یعنی اگر قوت ق وقت ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو دھکہ وقفہ $ت_ا - ت_ب$ میں ذیل کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے

$$ق_1 \delta ت_1 + ق_2 \delta ت_2 + \dots + ق_ن \delta ت_ن \qquad (۶)$$

۲۰۷

جہاں $\delta ت_1$، $\delta ت_2$، ... $\delta ت_ن$ وقفہ $ت_ا - ت_ب$ کے ذیلی حصے ہیں اس طور پر کہ

$$\delta ت_1 + \delta ت_2 + \dots + \delta ت_ن = ت_ب - ت_ا \qquad (۷)$$

اور $ق_1$، $ق_2$، ..... $ق_ن$ ان وقفوں میں قوت کی قیمتیں ہیں۔
پس ہماری موجودہ ترقیم کے لحاظ سے دھکہ ہے

$$\int_{ت_ا}^{ت_ب} ق \, دت \qquad (۸)$$

+ نوٹ:- تکملہ $\int$ میں علامت $\int$ حرف s کی خاص صورت ہے، اسکو پہلے ریاضی دانوں نے (Summation) حاصل جمع کی علامت کے لئے اختیار کیا۔ تکمل کی سمت کو اس طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ فوریر کی ایجاد ہے۔

$\int_ا^ب$ فہ (لا) ذلا میں علامت $\int$ مجموعہ کا مسیم (م) سمجھا جا سکتا ہے (مترجم)

نیوٹن کے دوسرے قانون حرکت کے مطابق کسی کمیت (ک) کے معیار کی تبدیلی اس دھکے کے مساوی ہوتی ہے جو اسے لگتا ہے یا

$$ک و - ک و_ا = \int_{ت_ا}^{ت} ق \, ذ ت \quad .... (۹)$$

جہاں و، و$_ا$ ابتدائی اور انتہائی رفتاریں ہیں۔

نیز متغیر قوت کا کام قوت کا مکانی تکملہ ہے۔ اگر قوت ق، جسم کے مقام (س) کا تفاعل ہو تو س جیسے س$_ا$ سے س$_ب$ تک بدلتا ہے کام جو کیا گیا ہے وہ ہے

$$\int_{س_ا}^{س_ب} ق \, ذ س \quad .... (۱۰)$$

مثلاً گیس کی اکائی کمیت جب حجم ح$_ا$ سے ح$_ب$ تک پھیلتی ہے تو جو کام ہوتا ہے وہ

$$\int_{ح_ا}^{ح_ب} د \, ذ ح \quad .... (۱۱)$$

ہے اگر حجم ح کے وقت دباؤ د ہو۔ اسے ہم دیکھ سکتے ہیں اگر گیس کو اکائی رقبہ کی تراش کے اسطوانہ میں، فشارہ کے ذریعہ بند کیا ہوا فرض کیا جائے تکملہ (۱۰) یا (۱۱) کی ترسیمی تعبیر اکثر اوقات عملیات میں استعمال کیجاتی ہے مثلاً (۱۰) کی صورت میں اگر ایک منحنی بنایا جائے جس میں س فصلہ ہو اور ق معین تو کام اس رقبہ سے تعبیر ہوگا جو منحنی، س کے محور اور س$_ا$ اور س$_ب$ کے متناظر معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یہ واٹ کی نمائندہ تصویر کا اصول ہے*۔

۹۰۔ استدقاق کا ثبوت۔ جب مجموعہ ∑ کی ایک

* ذیل کے حوالے ملاحظہ ہوں Maxwell, Theory of Heat باب پنجم
Rankine, the Steam Engine دفعہ ۴۳

معین انتہائی قیمت ہو جیسا اوپر بیان ہوا تو فہ (لا) کو "قابل تکمل" کہا جاتا ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ہر مسلسل تفاعل اس مفہوم کے مطابق قابل تکمل ہے[+] لیکن باضابطہ ثبوت کے مدنظر ہم اپنی توجہ صرف اس خاص صورت تک محدود رکھینگے جس میں متغیر متبوع کی سعت محدود تعداد کے ایسے وقفوں میں منقسم ہو سکتی ہے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ عملی نقطہ نظر سے یہ کافی ہوگا۔ (محدود ہونے کی قید کے علاوہ) کوئی اور قید عائد کرنے سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو ثابت حدود مقرر کئے جا سکتے ہیں جن کے درمیان ج لازماً واقع ہوتا ہے۔ اگر وقفہ (ب - ا) کے اندر تفاعل فہ (لا) کی قیمتوں کی نچلی اور اوپر کی حدود (دفعہ ۱۷) لہ اور مہ ہوں تو ظاہر ہے کہ ج ذیل کے جملوں کے درمیان واقع ہوگا۔ ۲۰۸

لہ (ھ۱ + ھ۲ + ... + ھن) = لہ (ب - ا)

اور مہ (ھ۱ + ھ۲ + ... + ھن) = مہ (ب - ا)

تخصیص کی خاطر اب ہم مان لیتے ہیں کہ ب > ا اور فہ (لا) استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے جیسے لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے۔ وقفہ (ب - ا) کی تقسیم کے کسی خاص طریقہ

ھ۱، ھ۲، ...... ھن .... (۱)

پر غور کرو اور فرض کرو کہ

ج = م۱ ھ۱ + م۲ ھ۲ + ... + من ھن ...... (۲)

+ اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ تکملہ کے لئے ریاضی ضابطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

جہاں دفعہ ۸۹ کے مطابق ھار کوئی قیمت ہے جو تفاعل وقفہ ھر میں اختیار کرتا ہے۔

اب (۲) میں ھا، ھا۲، .... ھان کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں رکھو جو اِن وقفوں کے شروع میں ہیں، اس طرح کوئی رقم نہیں بڑھے گی۔ اگر محصل مجموعہ کو حَ سے تعبیر کیا جائے تو

حَ < ح .... (۳)

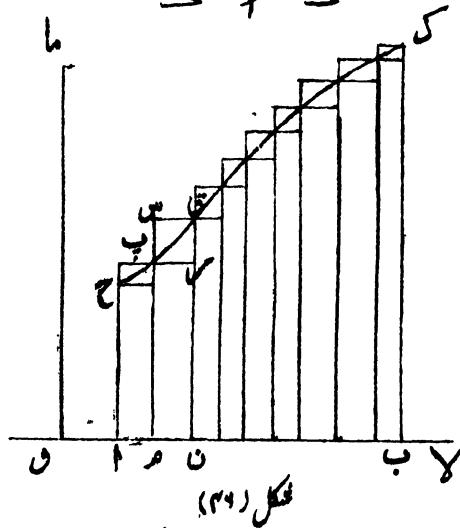
اس کے بعد اگر ھا، ھا۲، .... ھان کی بجائے تفاعل کی وہ قیمتیں درج کی جائیں جو بالترتیب اِن وقفوں کے آخر سروں پر ہیں تو کوئی رقم کم نہیں ہوگی۔ اس لئے محصل مجموعہ حً ہو تو

حً > ح .... (۴)

ما ک پ س ق حا ح

ق ا ر ن ب لا

شکل (۴۶)

۲۰۹

شکل ۴۶ میں مقدار حَ ایسی مستطیلوں کے سلسلہ کا مجموعہ ہے جیسے پ ن اور حً ایسی مستطیلوں کا مجموعہ جیسے س ن۔ اس لئے فرق حً ۔ حَ ایسی مستطیلوں کے مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جیسے س ر۔ موخر الذکر مستطیلوں کے ارتفاعوں کا مجموعہ ک ب ۔ ج ا یا فہا (ب)۔ فہ (ا) ہے، اگر ک بڑے سے بڑا قاعدہ ہو یا قفول (۱)

میں سے بڑے سے بڑا وقفہ ہو تو

حً ـ حَ ≯ ک [فہ(ب) ـ فہ(ا)] ..... (۵)

اب سعت (ب ـ ا) کی تقسیم کے تمام ممکن طریقوں پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مجموعات حَ کی جو ہمیشہ مہ(ب ـ ا) سے کم رہتے ہیں اوپر کی ایک انتہا ہوگی۔ اسے سَ سے تعبیر کرو اور مجموعات حً کی جو ہمیشہ لہ(ب ـ ا) سے بڑے رہتے ہیں ایک نچلی انتہا ہوگی جسے سً سے تعبیر کرو۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ سً ≮ سَ ـ (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ فرق سً ـ سَ کو لازماً صفر اور ک {فہ(ب) ـ فہ(ا)} کے درمیان واقع ہونا چاہیئے۔ اس بیان میں ک اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے ظاہر ہے کہ سَ اور سً مساوی ہوئے بغیر نہیں رہ سکتے۔ ان کی مشترک قیمت کو ہم س سے تعبیر کرینگے۔

آخر الامر یہ ظاہر ہے کہ

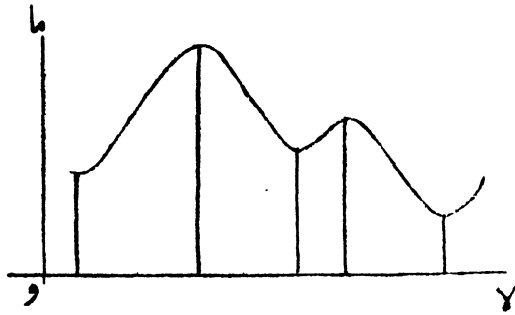
|ح ـ س| < حً ـ حَ < ک {فہ(ب) ـ فہ(ا)}

.... (۶)

اس لئے ک کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس امر کا پورا اطمینان کر سکتے ہیں کہ |ح ـ س| کسی مقررہ مقدار سے کم ہوگا خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔*

اسی طرح کا ثبوت درست ہوگا اگر تفاعل فہ(لا) سعت (ب ـ ا) میں استقلال کے ساتھ گھٹے۔

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ آخری نتیجہ درست رہے گا اگر سعت کو ایسے چھوٹے وقفوں کی محدود تعداد میں توڑا جا سکے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۷

* نیوٹن نے Principia, lib i; Sec. i lemma iii. (1687) میں جو ثبوت دیا ہے یہ ثبوت اس کی توسیع ہے۔ تمام ہندسی تخیلات کو نکال کر استدلال کو محض تحلیلی شکل میں پیش کرنا آسان ہوگا۔

شکل (۴۷)

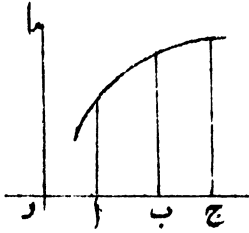
۲۱۰ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ب > ا۔ اگر ب < ا تو وقفے ه۱، ه۲ ...... هن منفی ہونگے مگر استدلال میں اصولاً کوئی فرق نہیں آئیگا۔

۹۱ — $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) فرلا کی خاصیتیں۔

(آ) اگر تکملوں $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ فا (لا) فرلا اور $\int_{\text{ب}}^{\text{ا}}$ فا (لا) فرلا کا باہم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ دونوں تکملے ایک ہی مجموعہ کی انتہا خیال کئے جاسکتے ہیں، صرف اتنا فرق ہے کہ ایک صورت میں لا کے اضافے ه۱، ه۲ ...... هن جن سے ملکر وقفہ ب - ا یا (ا - ب) بنتا ہے دوسری صورت کے اضافوں کے لحاظ سے متضاد علامت رکھتے ہیں۔

اسلئے
$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فا (لا) فرلا} = - \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots (1)$$

(۲) نیز تعریف سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ج}} \text{فا (لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا (لا) فرلا} + \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{فا (لا) فرلا} \quad \ldots (2)$$

شکل ۴۸ سے اسکی ترسیمی توضیح ہوتی ہے

(۳) اگر فہ (لا) کی کم سے کم اور بڑی سے بڑی قیمتیں لہ اور مہ ہوں جیسے لا، ا سے ب تک گذرتا ہے تو تکملہ

شکل (۴۸)

$$\int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا}$$

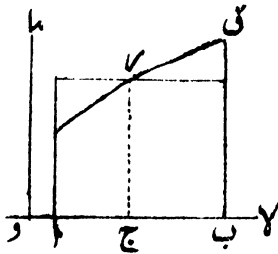
قیمتوں لہ (ب - ا) اور مہ (ب - ا) کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اسلئے لازماً

یہ (ب - ا)

کے مساوی ہے جہاں لہ اور مہ کے درمیان مقدار یہ واقع ہے ۔

اگر فہ (لا) مسلسل ہو تو وسعت (ب - ا) کے اندر یہ تفاعل وہ تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے جو لہ، مہ کے درمیان واقع ہیں ۔ اسلئے ا اور ب کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت (ج) ضرور ایسی ہونی چاہیئے کہ فہ (ج) = یہ ۔ شکل ۴۹ کی ترسیمی تعبیر میں رقبہ پ ا ب ق اس مستطیل کے مساوی ہے جس کا قاعدہ ا ب ہے اور ارتفاع سعت ا ب کے ایک نقطہ ج کے معین کے مساوی ہے ۔ صریحاً ہم لکھہ سکتے ہیں

شکل (۴۹)

ج = ا + طہ (ب - ا)

۲۱۱ جہاں طہ کوئی مقدار ہے جو ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہے اس قرارداد کے مطابق

$$\int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا} = \text{(ب - ا) فہ} \{ \text{ا + طہ (ب - ا)} \} \quad \dots\dots (۳)$$

(۴) زیادہ عام طور پر اگر ع، و، ما تین ایسے لا کے تفاعل ہوں کہ ا سے ب تک لا کی قیمتوں کے لئے ع > ما > و .... (۴)

تو تکملہ $\int_{ا}^{ب} \text{ما فرلا}$ .... (۵)

بلحاظ قیمت تکملوں $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا اور $\int_{ا}^{ب}$ د فرلا .... (۶)

کے درمیان واقع ہوگا۔

پہلے فرض کرو کہ ب > ا۔ تب $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا ۔ $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا = $\int_{ا}^{ب}$ (ع ۔ ما) فرلا

(۴) کی رو سے اس مجموعہ کی ہر رقم جس کی انتہا آخری تکملہ ہے مثبت ہوگی۔ اس لئے

$\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا > $\int_{ا}^{ب}$ ع فرلا .... (۷)

اور اسی طرح $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا > $\int_{ا}^{ب}$ د فرلا .... (۸)

اگر ب < ا تو (۷) اور (۸) کی نامساواتیں الٹ جائینگی۔

۹۲۔ محدود تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے۔

فرض کرو کہ ت = $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا .... (۱)

صریحاً ت "تکمل کے حدود" ا، ب کا تفاعل ہے اور عام طور پر بدلیگا جبکہ انمیں سے کوئی ایک بدلے۔ ا کو ثابت مان کر ت کا مشتق تفاعل بلحاظ اوپر کی حد کے مرتب کرو اس طرح

ت + مف ت = $\int_{ا}^{ب+مف ب}$ فہ (لا) فرلا = $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا + $\int_{ب}^{ب+مف ب}$ فہ (لا) فرلا

(۲).........

دفعہ ۹۱، (۲) کی رو سے۔ اس لئے

مف ت = $\int_{ب}^{ب+مف ب}$ فہ (لا) فرلا = مف ب فہ (ب + طہ مف ب) ....(۳)

۲۱۲ دفعہ ۹۱ ' (۳) کی رو سے - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مف ت 'مف ب کے ساتھ معدوم ہوتا ہے یعنی ت ' ب کا مسلسل تفاعل ہے -

نیز چونکہ $\frac{مف ت}{مف ب}$ = فہ (ب + طہ مف ب) ......(۴)

انتہا مف ب ← . لینے سے

$\frac{فرت}{فرب}$ = فہ (ب) ....(۵)

اسی طرح اگر اوپر کی حد ب کو ثابت رکھکر نچلی حد ا کو بدلا جائے تو ت ' ا کا مسلسل تفاعل ہوگا اور

$\frac{فرت}{فرا}$ = - فہ (ا) ....(٦)

۹۳ — نامحدود تکملہ کا وجود - اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ کوئی تفاعل فہ (لا) جسکی نوعیت وہ ہو جو دفعہ ۹۰ میں بیان کی گئی ہے ایک نامحدود تکملہ رکھتا ہے یعنی ایک ایسے قابل تعین (ضروری نہیں کہ یہ محسوب بھی ہوسکے) تفاعل پہ (لا) کا وجود ہے کہ

پہَ (لا) = فہ (لا) ....(۱)

یا پہ (لا) = عفَ فہ (لا) ....(۲)

کیونکہ اگر لکھا جائے پہ (ضہ) = $\int_{م}^{ضہ}$ فہ (لا) فرلا ....(۳)

تو بائیں جانب کا جملہ ' دفعہ ۹۰ کی رو سے ' ضہ کا ایک قابل تعین تفاعل ہے اور اوپر کی تحقیق سے واضح ہے کہ اس شرط کو پورا کرتا ہے

پہَ (ضہ) = فہ (ضہ) ....(۴)

موجودہ نقطۂ نظر سے (۳) میں تکمل کی نچلی حد اختیاری ہے اور اس لئے تفاعل پہ (ضہ) جمع شدنی مستقل کی حد تک ناقابل تعین ہے کیونکہ دفعہ ۹۱ (۲) کی رو سے (۳) میں نچلی حد کے طور پر ا کی بجائے ر درج کرنا گویا بائیں جانب تکملہ

$$\int_{\text{ر}}^{\text{ا}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا}$$

کا جمع کر دینا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۲۷ کے ساتھ۔

۹۴۔ محدود تکملے کے محسوب کرنیکا قاعدہ۔

جب کبھی پہ (لا) کی تحلیلی شکل معلوم ہو جس کا پہلا مشتق فہ (لا) ہے تو محدود تکملہ

$$\text{ت} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کی قیمت فوراً لکھی جا سکتی ہے۔ کیونکہ اگر ا کو ثابت رکھا جائے تو دفعہ ۹۲ کی رو سے

۲۱۲

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرب}} = \text{فہ}(\text{ب}) = \text{پہ}(\text{ب}) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بموجب فرض۔ دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ ت اور پہ (ب) صرف "ایک مستقل" کے لحاظ سے متفادت ہو سکتے ہیں یعنی ان میں فرق صرف ایک مستقل مقدار کا ہو سکتا ہے جو ب پر منحصر نہ ہو۔ پس

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا} = \text{پہ}(\text{ب}) + \text{مر} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

مر چونکہ ب پر منحصر نہیں اسلئے مر معلوم کرنیکے لئے رکھو ب = ا جس سے

$$\text{پہ}(\text{ا}) + \text{مر} = \int_{\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{فرلا} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس لئے مر = − پہ (ا) اور

$$\int_{ا}^{ب} فہ(لا)\, فر لا = پہ(ب) - پہ(ا) \quad \ldots\ldots (۵)$$

تکملی احصا کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس سے کسی معلومہ تفاعل فہ(لا) کے محدود تکملہ کی قیمت دریافت کرنے کا مسئلہ مقلوب تفاعل پہ(لا) یا عفتا فہ(لا) کے حاصل ہونے پر مبنی ہوتا ہے۔ اب اسکی وجہ ظاہر ہے کہ اس مقلوب تفاعل کو اس شکل

$$\int فہ(لا)\, فر لا \quad \ldots\ldots (۶)$$

سے کیوں تعبیر کرتے ہیں۔ (۶) صرف

$$\int^{لا}_{} فہ(لا)\, فر لا \quad \ldots\ldots (۷)$$

کا اختصار ہے جہاں ا اختیاری ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ ا میں کوئی تبدیلی محض مستقل کو بدل دینے کے مرادف ہے۔

ترقیم

$$\Big[پہ(ب) \Big]_{ا}^{ب} \quad \ldots\ldots (۸)$$

کو اکثر اوقات اختصار کے طور پر پہ(ب) - پہ(ا) کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱ -

$$\int_{ا}^{ب} قو^{ک لا}\, فر لا \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہاں $فہ(لا) = قو^{ک لا}$ ، $پہ(لا) = \frac{۱}{ک} قو^{ک لا}$

پس

$$\int_{ا}^{ب} قو^{ک لا}\, فر لا = \frac{۱}{ک}\left(قو^{ک ب} - قو^{ک ا}\right) \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

مثال ۲ -

$$\int_{ا}^{\frac{ط}{۲}} جب^{۲} لا\, فر لا \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

۲۱۴

یہاں $فہ(لا) = جب^{۲} لا$ ، $پہ(لا) = \frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۴} جب ۲ لا$

پس $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}}$ جب² لا فرلا = $\frac{\pi}{4}$ .... (۱۲)

۹۵- وہ صورتیں جہاں تفاعل فا (لا) یا تکمل کے حدود لا متناہی ہو جاتے ہیں۔

اور مثالوں پر غور کرنے سے پیشتر دفعہ ۹۵ کے تکملہ کی تعریف کو ذرا وسیع کرنا مناسب ہوگا۔ وہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ تکمل کے حدود ا، ب محدود ہیں اور تفاعل فا (لا) تمام وسعت ا ب میں محدود ہے۔

اب ہم دیکھینگے کہ بعض حالات میں ان شرائط کو ذرا ڈھیلا کردینا کیسے ممکن ہے۔

(آ) فرض کرو کہ فا (لا)، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہے۔ تکملہ

$\int_{ا}^{ص}$ فا (لا) .... (۱)

پر غور کرو جہاں ص > ا ۔ اگر ص کو لا انتہا بڑھانے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس انتہائی قیمت کو تکملہ

$\int_{ا}^{\infty}$ فا (لا) فرلا .... (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں اور تکملہ (۱) کو ص ← ∞ کے لئے "مستدق" کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ لا متناہی سلسلوں کے نظریہ سے یہ توقع کیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) استدقاق کے لئے یہ کافی شرط نہیں ہے کہ

نہا$_{لا \to \infty}$ فا (لا) = ۰ .... (۳)

نیز یہ شرط ضروری بھی نہیں ہے کیونکہ استدقاق اس صورت میں بھی ممکن ہو سکتا ہے جبکہ لا ← ∞ کے لئے فا (لا) کی کوئی معین انتہائی قیمت نہ ہو۔

اسی طرح کی تعریف $\int_{-\infty}^{ب}$ فا (لا) فرلا .... (۴)

کے لئے بھی مرتب ہو سکتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ فہ (لا) لامتناہی ہوجاتا ہے تکمل کے حدود پر یا ان کے درمیان۔

صرف اُس صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جہاں لا کی صرف ایک قیمت ہو جس کے لئے فہ (لا) ← ∞۔ عام صورت اس صورت میں تحویل ہوسکتی ہے اگر سعت ب۔ ا کو چھوٹے وقفوں میں توڑ دیا جائے*۔ ۱۵ء

اگر فہ (لا) (صرف) اوپر کی حد پر لامتناہی ہوتا ہو تو ہم سب سے پہلے تکملہ

$$\int_{ا}^{ب-صہ} فہ (لا) فرلا \quad .... (۵)$$

پر غور کرتے ہیں جہاں صہ مثبت ہے۔ اگر صہ کو لاانتہا کم کرنے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس قیمت کو ہم تکملہ

$$\int_{ا}^{ب} فہ (لا) فرلا$$ کی تعریف قرار دیتے ہیں۔

اسی طرح کی تعریف اُس صورت پر حاوی ہوگی جہاں فہ (لا) نچلی حد ا پر لامتناہی ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) حدود ا، ب کے درمیان لامتناہی ہوتا ہو مثلاً لا = ج کے لئے تو ہم اس مجموعہ پر غور کرتے ہیں

$$\int_{ا}^{ج-صہ} فہ (لا) فرلا + \int_{ج+صہ'}^{ب} فہ (لا) فرلا \quad .... (۶)$$

اگر صہ (اور صہ') کے کم کرنے سے ان میں سے ہر ایک تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو ان قیمتوں کے مجموعہ کو تکملہ

---

* یہ مان لیا جاتا ہے کہ فہ (لا) اکیلے نقطوں کی محدود تعداد پر ہی لامتناہی ہوتا ہے۔

$$\int^{ب} فہ(لا)\, فرلا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)^{+}$$

کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔

جب، فہ (لا) تنہا نقطوں کی محدود تعداد پر لا متناہی یا غیر مسلسل ہو تو ایسی صورتوں کا استعمال یوں ہو سکتا ہے کہ سعت کو ایسے چھوٹے وقفوں میں تقسیم کیا جائے جن کا نقاط غیر تسلسل احاطہ کریں۔

مثال ۱۔
$$\int_{ب}^{سہ} قو^{عہ لا} فرلا = \left[-\frac{۱}{عہ} قو^{عہ لا} \right]^{سہ} = \frac{۱ - قو^{عہ سہ}}{عہ} \ldots\ldots (۸)$$

جیسے سہ بڑھتا ہے یہ جملہ انتہا $\frac{۱}{عہ}$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لئے

$$\int^{\infty} قو^{عہ لا} فرلا = \frac{۱}{عہ} \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

مثال ۲۔
$$\int_{۱}^{سہ} \frac{فرلا}{لا} = \left[لوک\ لا \right]_{۱}^{سہ} = لوک\ سہ \ldots (۱۰)$$ ۲۱۶

یہ سہ کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لئے سہ ← ∞ کے لئے کوئی انتہائی قیمت نہیں ہے اگرچہ

$$\underset{لا \to \infty}{نہا} \frac{۱}{لا} = ۰ \ldots\ldots (۱۱)$$

+ ایسی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں جہاں ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\int^{ج - صہ} فہ(لا)\, فرلا \quad اور \quad \int_{ج + صہ}^{ب} فہ(لا)\, فرلا$$

آخر لامر لا متناہی ہو لیکن اگر کوئی خاص رشتہ انتہا میں صفر ہونے والی تعدادوں صہ، صہ پر عائد کیا جائے تو ان دو تکملوں کے لا متناہی جزو اس طور پر ایک دوسرے کو زائل کر سکتے ہیں کہ مجموعہ محدود رہے۔ رشتہ مذکورہ اگر سہ = سہ ہو تو نتیجہ محدود کے وجب اس کا وجود ہو کوشی (Cauchy) نے تکملہ (۷) کی ''صدری قیمت'' کہا ہے۔

مثال ۳۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}$ .... (۱۲)

تفاعل $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}$ لاتناہی ہو جاتا ہے لا ← ۱ کے لئے۔ لیکن

$$\int_{\text{۰}}^{\text{۱} - \text{صہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}} = \left[-\text{۲}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}} \right]_{\text{۰}}^{\text{۱} - \text{صہ}} = \text{۲} - \text{۲}\sqrt{\text{صہ}} \quad \text{....(۱۳)}$$

اور جیسے صہ لاتناہی طور پر کم ہوتا ہے یہ جملہ انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

اس لئے $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}} = \text{۲}$ .... (۱۴)

مثال ۴۔ $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{لوک لا فرلا}$ .... (۱۵)

$$\int_{\text{صہ}}^{\text{۱}} \text{لوک لا فرلا} = \left[\text{لا لوک لا} - \text{لا} \right]_{\text{صہ}}^{\text{۱}} \quad \text{.........(۱۶)}$$

ن ف۸۱ (ز) سے $\text{نہیا}_{\text{صہ} \to \text{۰}}$ صہ لوک صہ = ۰۔

اس لئے $\int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \text{لوک لا فرلا} = -\text{۱}$ .... (۱۷)

۹۶ — دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال۔

محدود تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے چند اور تمثیلی سوال درج کئے جاتے ہیں

مثال ۱۔ $\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{جب لا فرلا} = \left[-\text{جم لا} \right]_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} = \text{۱}$ ....(۱)

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{جم لا فرلا} = \left[\text{جب لا} \right]_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} = \text{۱} \quad \text{.........(۲)}$$

$$\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} \text{جب لا جم لا فرلا} = \left[\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{جب}^{\text{۲}} \text{لا} \right]_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \quad \text{......(۳)}$$

مثال ۲۔ دفعہ ۸۰ کی رو سے

$$\int_{0}^{\text{سہ}} \text{فو}^{-\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا فرلا} = \left[-\frac{\text{عا جب بہ لا} + \text{بہ جم بہ لا}}{\text{عا}^2+\text{بہ}^2}\,\text{فو}^{-\text{عالا}}\right]_{0}^{\text{سہ}}$$

$$= \frac{\text{بہ}}{\text{عا}^2+\text{بہ}^2} - \frac{\text{عا جب بہ سہ} + \text{بہ جم بہ سہ}}{\text{عا}^2+\text{بہ}^2}\,\text{فو}^{-\text{عاسہ}}$$

۲۱۷

اگر عا مثبت ہو تو جیسے سہ لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے آخری رقم اپنی انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس لئے

$$\int_{0}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عالا}}\,\text{جب بہ لا فرلا} = \frac{\text{بہ}}{\text{عا}^2+\text{بہ}^2} \quad\ldots\ldots (۴)$$

اسی طرح

$$\int_{0}^{\infty} \text{فو}^{-\text{عالا}}\,\text{جم بہ لا فرلا} = \frac{\text{عا}}{\text{عا}^2+\text{بہ}^2} \quad\ldots\ldots (۵)$$

مثال ۳۔ $\int_{0}^{\text{سہ}} \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2} = \left[\text{مس}^{-1}\,\text{لا}\right]_{0}^{\text{سہ}} = \text{مس}^{-1}\,\text{سہ} - \text{مس}^{-1}\,0$

تفاعل $\text{مس}^{-1}\,\text{لا}$ کثیر القیمت تفاعل ہے (دفعہ ۱۶) لیکن یہ چنداں اہمیت نہیں رکھتا کہ کونسی قیمت لی جائے بشرطیکہ ہم یہ فرض کرلیں کہ یہ یکساں طور پر بدلتا ہے جیسے لا تکمل کی سمت میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر لیا جائے $\text{مس}^{-1}\,0 = 0$ تو $\text{مس}^{-1}\,\text{سہ}$ سے وہ قیمت مراد ہوگی جو یکساں طور پر ۰ سے سہ تک بڑھتی ہے۔ جب، سہ لاانتہا بڑھتا ہے تو یہ قیمت انتہاً $\frac{\pi}{2}$ کی طرف مائل ہوتی ہے

اسلئے

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2} = \frac{\pi}{2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

مثال ۴۔ دفعہ ۸۷ (۴) کی رو سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{عا جب}^2\text{طہ} + \text{بہ جم}^2\text{طہ}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\text{عا بہ}}}\,\text{مس}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\text{عا}}{\text{بہ}}}\,\text{مس طہ}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

اب جیسے طہ، ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے، $\sqrt{\frac{\text{عا}}{\text{بہ}}}$ مس طہ، صفر سے ∞ تک

بڑھتا ہے اور اسلئے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ مس^{-۱} $\sqrt{\frac{عہ}{بہ}}$ مس طہ | صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے۔

اس لئے $\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{فر طہ}{عہ جب^2 طہ + بہ جم^2 طہ} = \frac{\pi}{2\sqrt{عہ بہ}}$ ......(۷)

طالب علم نے گذشتہ باب کی ضمن میں دیکھا ہوگا کہ جب متغیر کے بدلنے سے "نامحدود تکمل" عمل میں لایا جاتا ہے (دفعات ۷۷، ۷۹) تو عمل کا نہایت تکلیف دہ حصہ وہ ہوتا ہے جس میں ابتدائی متغیر کی طرف عود کیا جاتا ہے۔ جب معلومہ حدود کے درمیان محدود تکملہ دریافت کرنا مقصود ہو تو عمل کا یہ حصہ غیر ضروری ہوتا ہے اور نامحدود تکملہ حاصل کرکے اس میں نئے حدود درج کردینا کافی ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ $\int_{0}^{ا} \sqrt{ا^2 - لا^2}\, فرلا$ کو معلوم کرو۔

دفعہ ۷۹ میں لا = اجب طہ رکھنے سے حاصل ہوا

$$\int \sqrt{ا^2 - لا^2}\, فرلا = ا^2 \int جم^2 طہ\, فرطہ = \frac{1}{2} ا^2 (طہ + \frac{1}{2} جب ۲ طہ)$$

اب اگر طہ، ۰ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بدلتا تو لا، ۰ سے ا تک بدلتا۔ اسلئے

$$\int_{0}^{ا} \sqrt{ا^2 - لا^2}\, فرلا = \frac{1}{2} ا^2 \left[طہ + \frac{1}{2} جب ۲ طہ \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \pi ا^2 \quad ....(۹)$$

۹۷۔ تحویلی ضابطے۔ دفعات ۸۱، ۸۲ کے طریقے جب محدود تکملوں کی تحویل میں استعمال کئے جاتے ہیں تو تکمل شدہ رقوم کے دونوں حدود پر صفر ہو جانے سے خاص طور پر سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ ۲۱۸

(۱) اگر $ق_ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جم^ن طہ\, فرطہ$ ....(۱۰)

تو دفعہ ۸۲ (۲) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \left[\frac{1}{\text{ن}}\, \text{جب طہ جم}^{\text{ن}-1}\text{طہ} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\, \text{ع}_{\text{ن}-2} \quad \ldots (۲)$$

اگر ن > ۱ تو پہلا حصہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ جب ۰ = ۰، جم $\frac{\pi}{2}$ = ۰

اس لئے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}-2}\text{طہ فرطہ} \quad \ldots (۳)$$

اسی طرح سے دفعہ ۸۲ (۶) کی رو سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ} = \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}-2}\text{طہ فرطہ} \quad \ldots (۴)$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو (۳) کے متواتر استعمال سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$$

کو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = 1 \quad \text{یا} \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots (۵)$$

کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

اسی طرح سے $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$ کو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ فرطہ} = 1 \quad \text{یا} \quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{2} \quad \ldots (۶)$$

پر منحصر کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۔ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{5}\text{طہ فرطہ} = \frac{4}{5} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{3}\text{طہ فرطہ}$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{8}{15}$$

اس طور پر دو تین مثالیں حل کرنے کے بعد طالب علم نتیجہ کے متواتر اجزائے ضربی کو زبانی

لکھہ سکیگا ، مثلاً

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{6}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\,\pi$$

اوپر کے شکلوں کی عام قیمتیں آسانی سے لکھی جا سکتی ہیں ۔ مثلاً اگر ن طاق ہو تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots\times 2}{\text{ن}(\text{ن}-2)\cdots\times 3} \quad \ldots\ldots(7)$$

لیکن اگر ن جفت ہو تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots\times 1}{\text{ن}(\text{ن}-2)\cdots\times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots(8)$$

اس نمونہ کے تکملے احصا کے طبیعی استعمال میں اکثر واقع ہوتے ہیں ۔

(۲) اگر

$$\text{ع}_{\text{م}،\text{ن}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} \quad \ldots\ldots(9)$$

تو دفعہ ۸۲ (۱۰) کی رو سے

$$\text{ع}_{\text{م}،\text{ن}} = \left[\frac{1}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{جب}^{\text{م}+1}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}-1}\,\text{طہ}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{م}،\text{ن}-2} \quad \ldots\ldots(10)$$

اگر ن > ۱ تو [ ] کے اندر کا جملہ دونوں حدود پر معدوم ہوتا ہے ۔ اس طرح

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\text{ن}-1}{\text{م}+\text{ن}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}-2}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} \quad \ldots\ldots(11)$$

اسی طرح دفعہ ۸۲ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے ، اگر م > ۱

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\text{م}-1}{\text{م}+\text{ن}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{م}-2}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\ \text{فرطہ} \quad \ldots\ldots(12)$$

ان ضابطوں کے ذریعہ کوئی سا قوت نما بمقدار ۲ کے کم کیا جا سکتا ہے اور اس عمل کی تکرار سے تکملہ (۹) ایسے تکملہ پر آکے منحصر ہو سکتا ہے جس میں قوت نما ۱ یا صفر ہے بشرطیکہ م ، ن مثبت صحیح عدد ہوں ۔ آخر الامر حاصل میں ذیل کی کوئی نہ کوئی صورت واقع ہوگی

$$\left.\begin{array}{ll} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{2} \quad , & \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{1}{2} \\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = 1 \quad , & \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ فرطہ} = 1 \end{array}\right\} \quad \dots\dots (۱۳)$$

۲۲۰

مثال ۲۔ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5}\text{طہ جم}^{3}\text{طہ فرطہ} = \frac{4}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{3}\text{طہ جم}^{3}\text{طہ فرطہ}$

$$= \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^{3}\text{طہ فرطہ}$$

(۱۲) کی رو سے۔ نیز (۱۱) سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم}^{3}\text{طہ فرطہ} = \frac{2}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ جم طہ فرطہ} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$$

اس لئے $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{5}\text{طہ جم}^{3}\text{طہ فرطہ} = \frac{4}{8} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

تھوڑی مشق کے بعد جواب فوراً لکھا جا سکیگا۔ مثلاً

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{6}\text{طہ جم}^{2}\text{طہ فرطہ} = \frac{5}{8} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5}{256}\pi$$

ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) نیز (۳) اور (۴) کی عملی مشقوں میں ضرورت ہوتی ہے۔ ان کو یاد رکھنا مناسب ہے۔

نیز جبری تکملہ $\int_{0}^{1} \text{لا}^{\text{م}} (1 - \text{لا})^{\text{ن}} \text{ فرلا}$ .... (۱۴)

میں رکھو لا = جب^{2} طہ تو اس کی یہ صورت ہو جاتی ہے

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2\text{م}+1}\text{طہ جم}^{2\text{ن}+1}\text{طہ فرطہ} \quad \dots\dots\dots (۱۵)$$

اسکی قیمت اوپر کے ضابطوں سے لکھی جا سکتی ہے جب کبھی ۲م+۱ اور ۲ن+۱ مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر ہوں۔

اسی طرح تکملہ $\int_0^1$ لا^م (۱ - لا^۲)^ن فرلا ....(۱۶)

میں رکھو لا = جب طہ تو تکملہ یہ شکل اختیار کرتا ہے

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ جب^م طہ جم^{۲ن+۱} طہ فرطہ ....(۱۷)

مثال ۳- $\int_0^1$ لا^۲ (۱ - لا)^{$\frac{۳}{۲}$} فرلا = ۲ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ جب^۵ طہ جم^۴ طہ فرطہ

= ۲ × $\frac{۴}{۹}$ × $\frac{۲}{۷}$ × $\frac{۳}{۵}$ × $\frac{۱}{۳}$ × ۱ = $\frac{۱۶}{۳۱۵}$

مثال ۴- $\int_0^1$ لا^۲ (۱ - لا^۲)^{$\frac{۳}{۲}$} فرلا = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ جب^۲ طہ جم^۴ طہ فرطہ = $\frac{۱}{۶}$ × $\frac{۳}{۴}$ × $\frac{۱}{۲}$ × $\frac{\pi}{۲}$

= $\frac{\pi}{۳۲}$

۲۲۱　**۹۸ - مربوط تکملے۔** محدود تکملوں کے متعلق کئی مسئلے ہیں جو دفعہ ۸۹ کی تعریف سے محض وجدانی طور پر حاصل ہوتے ہیں مثلاً

$\int_0^1$ فہ (لا) فرلا = $\int_0^1$ فہ (۱ - لا) فرلا ......(۱)

اس کے ثبوت کے لئے لکھو لا = ۱ - لاَ ، فرلا = - فرلاَ۔ تکمل کے حدود میں لا = ۰ ، لا = ۱ کے جواب میں لاَ = ۱، لاَ = ۰ بالترتیب۔ پس

$\int_0^1$ فہ (لا) فرلا = - $\int_1^0$ فہ (۱ - لاَ) فرلاَ = $\int_0^1$ فہ (۱ - لا) فرلا

آخیر میں زیر نکال دیا گیا کیونکہ اس کی ضرورت نہیں۔

اوپر کا عمل مبدا کو نقطہ لا = ۱ پر لیجا کر محور لا کی سمت کو بدل دینے کے مرادف ہے، اس طور پر معلوم ہوگا کہ (۱) سے جو رقبے تعبیر ہوتے ہیں وہ مماثل ہیں۔

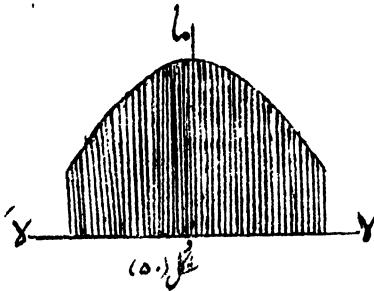
(۱) کی ضروری شکل یہ ہے

$\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ ف (جب طہ) فرطہ = $\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ ف (جم طہ) فرطہ ..... (۲)

مثال ۱۔ مثلاً $\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ جب^{۲} طہ فرطہ = $\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ جم^{۲} طہ فرطہ

پس ہر ایک تکملہ = $\frac{۱}{۲}\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ (جب^{۲} طہ + جم^{۲} طہ) فرطہ = $\frac{۱}{۲}\int_{٠}^{\frac{ط}{۲}}$ فرطہ = $\frac{ط}{۴}$

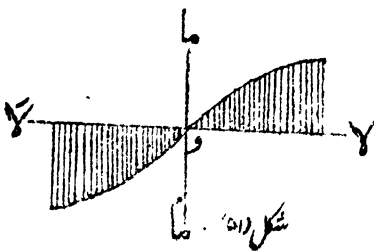
اگر فہ(لا) لا کا جفت تفاعل ہو یعنی فہ(-لا) = فہ(لا) ..... (۳)

تو $\int_{-ا}^{ا}$ فہ(لا) فرلا = ۲ $\int_{٠}^{ا}$ فہ(لا) فرلا .... (۴)　۲۲۲

پہلے تکملہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے صریحاً اس کی تنصیف محور ما سے ہوتی ہے۔

شکل (۵۰)

برعکس اس کے اگر فہ(لا) لا کا طاق تفاعل ہو یعنے فہ(-لا) = -فہ(لا) .. (۵)

تو $\int_{-ا}^{ا}$ فہ(لا) فرلا = ٠ .... (۶)

کیونکہ اُس مجموعہ میں جسکی انتہا یہ محدود تکملہ ہے (دفعہ ۸۹) جزو فہ(لا) مف لا اور متقابل کی علامت والا جزو فہ(-لا) مف لا دونوں ملکر ایک دوسرے کو ساقط کرتے ہیں۔

شکل (۵۱)

مثال ۲۔ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^2 طہ جم^4 طہ فرطہ = ۲ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^2 طہ جم^4 طہ فرطہ

$= ۲ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۲}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ = ۰ کیونکہ جب^3 طہ، طہ کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔

ایسے ہی وجوہات کی بناپر اگر فہ (ا۔ لا) = فہ (لا) ....(۷)

تو $\int_{0}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۲ × $\int_{0}^{\frac{ا}{۲}}$ فہ (لا) فرلا ....(۸)

لیکن اگر فہ (ا۔ لا) = ۔ فہ (لا) ....(۹)

تو $\int_{0}^{ا}$ فہ (لا) فرلا = ۰ ....(۱۰)

(۸) کی خاص صورت کے طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$\int_{0}^{\pi}$ ف (جب طہ) فرطہ = ۲ × $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ف (جب طہ) فرطہ ...(۱۱)

کیونکہ جب (π ۔ طہ) = جب طہ

۲۲۳ مثال ۳۔ $\int_{0}^{\pi}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ = ۲ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^2 طہ فرطہ

$= ۲ \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۴}{۱۵}$

اور $\int_{0}^{\pi}$ جب^2 طہ جم^3 طہ فرطہ = ۰

امثلہ ۳۱

۱۔ دفعہ ۲۱۸ مثال ۱ کے طریقہ سے ثابت کرو کہ $\int_{ا}^{ب}$ لا^2 فرلا = $\frac{۱}{۳}$ (ب^3 ۔ ا^3)

۲۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ثابت کرو کہ $\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{جم لا فرلا} = \text{جب بہ} - \text{جب عہ}$

۳۔ نیز ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{و}^{\text{ک لا}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{و}^{\text{ک ب}} - \text{و}^{\text{ک ا}}}{\text{ک}}$

۴۔ ترسیمی تخیلات کی بناء پر دکھاؤ کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ک فہ(لا) فرلا} = \text{ک} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا}$$

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا} = \int_{۰}^{\text{ب}-\text{ا}} \text{فہ(لا + ا) فرلا} \text{ ، } \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(ک لا) فرلا} = \frac{۱}{\text{ک}} \int_{\text{ک ا}}^{\text{ک ب}} \text{فہ(لا) فرلا}$$

۵۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(لا) فرلا} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ(ا + ب - لا) فرلا}$

۶۔ اگر ن اور پ مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \left(\frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ن}+۱} + \frac{۱}{\text{ن}+۲} + \dots + \frac{۱}{\text{پ ن}} \right) = \text{لوگ پ}$$

امثلہ ۳۲

۱۔ $\int_{۰}^{۱} \sqrt{\text{لا}}\, \text{فرلا} = \frac{۲}{۳}$ ، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = ۲$ ، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳ - ۲\text{لا}}} = \sqrt{۳} - ۱$

۲۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۲}$ ، $\int_{۰}^{\sqrt{\frac{۲}{۳}}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۲ - ۳\text{لا}^۲}} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$

۳۔ $\int_{۰}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲\text{لا}^۲} = \frac{\pi}{۲\text{اب}}$

۴۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^۲}} = ۱$ ، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا فرلا}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}} = \sqrt{۲} - ۱$

۲۲۴

۵- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \text{لوک}(1+\sqrt{2})$، $\int_{1}^{2} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \text{لوک}(2+\sqrt{3})$

۶- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا})} = \text{لوک}\ 2$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا}^2)} = \frac{1}{2}\text{لوک}\ 2$

۷- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2-\text{لا}+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

۸- $\int_{0}^{1} \frac{1-\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2} - 1$

۹- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{\pi}{2\,\text{اب}(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۰- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}^2\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{\pi}{2(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۱- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^2+\text{ا}^2)(\text{لا}^2+\text{ب}^2)} = \frac{1}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

۱۲- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2(1+\text{لا})} = 1 - \text{لوک}\ 2$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(1+\text{لا})^2} = \text{لوک}\ 2 - \frac{1}{2}$

۱۳- $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{(1+\text{لا}^2)^2} = \frac{\pi}{4}$،

۱۴- $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \frac{\pi}{2}$، $\int_{1}^{\infty} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2+1}} = \text{لوک}(1+\sqrt{2})$

۱۵- $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(1-\text{لا})}} = \pi$، $\int_{0}^{1} \sqrt{\left(\frac{\text{لا}}{1-\text{لا}}\right)}\,\text{فرلا} = \frac{\pi}{2}$

۱۶- $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \pi$، $\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{لا})}} = \pi$

۲۲۵

۱۸- $\int_{ا}^{ب} \sqrt{\frac{ب-لا}{لا-ا}}\ \text{فرلا} = \int_{ا}^{ب} \sqrt{\frac{لا-ا}{ب-لا}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{2}\pi(ب-ا)$

۱۹- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قط}^{2}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = 1$، $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{2}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = 1 - \frac{\pi}{4}$

۲۰- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جب}\ 2\text{طہ}\ \text{فرطہ} = 1$، $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}\ 2\text{طہ}\ \text{فرطہ} = 0$

۲۱- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{1+\text{جب}^{2}\text{طہ}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب طہ فرطہ}}{1+\text{جم}^{2}\text{طہ}} = \frac{\pi}{4}$

۲۲- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قط}^{4}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{3}{4}$، $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس}^{4}\text{طہ}\ \text{فرطہ} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

۲۳- $\int_{0}^{\pi} \frac{\text{فرطہ}}{1+ز\ \text{جم طہ}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-ز^{2}}}$، $[ز < 1]$

۲۴- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{1+\text{جم طہ}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{1+\text{جب طہ}} = 1$

۲۵- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{مس طہ فرطہ} = 0$، $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{قط طہ فرطہ} = \text{لوک}(3+2\sqrt{2})$

۲۶- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{قط طہ} - \text{مس طہ})\ \text{فرطہ} = \text{لوک}\ 2$،

۲۷- $\int_{0}^{\pi} \frac{\text{فرطہ}}{ا^{2} - 2اب\ \text{جم طہ} + ب^{2}} = \frac{\pi}{|ا^{2} - ب^{2}|}$

۲۸- $\int_{0}^{1} \text{لا}^{ن}\ \text{لوک لا فرلا} = -\frac{1}{(ن+1)^{2}}$

۲۹- $\int_{0}^{1} \text{جب}^{-1}\text{لا فرلا} = \frac{\pi}{2} - 1$، $\int_{0}^{1} \text{مس}^{-1}\text{لا فرلا} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{لوک}\ 2$

۳۰- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ جب طہ فر طہ} = 1$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ جم طہ فر طہ} = \frac{\pi}{2} - 1$

۳۱- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}^2 \text{ جب طہ فر طہ} = \pi - 2$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}^2 \text{ جم طہ فر طہ} = \frac{\pi^2}{4} - 2$

۳۲- $\int_0^{\pi} \text{طہ} (\pi - \text{طہ}) \text{ جب طہ فر طہ} = 4$ ، $\int_0^{\pi} \text{طہ} (\pi - \text{طہ}) \text{ جم طہ فر طہ} =$

۳۳- $\int_{-1}^{1} (1 - \text{لا}^2) \text{ جم به لا فر لا} = \frac{4}{\text{به}^3} (\text{جب به} - \text{به جم به})$

۳۴- $\int_0^{\infty} \frac{\text{لا سن}^{-1}\text{لا}}{(1 + \text{لا}^2)^2} \text{ فر لا} = \frac{\pi}{8}$

۳۵- $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}{\text{ا} - \text{لا}} \text{ فر لا} = \pi \left\{ \text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - 1} \right\}$ بشرطیکہ $\text{ا} > 1$

۳۶- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{طہ قط}^2 \text{ طہ فر طہ} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{ لوک } 2$

۳۷- $\int_0^{\infty} \text{قو}^{-\text{لا}} \text{ جم} \left(\text{لا} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ فر لا} = 0$

۳۸- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{فر ع}}{\text{جمز ع}} = \pi$

۳۹- $\int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}^2 \text{ قو}^{\text{لا}} + \text{ب}^2 \text{ قو}^{-\text{لا}}} = \frac{1}{\text{اب}} \text{ سن}^{-1} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۰- $\int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{\text{ا}^2 \text{ جمز}^2 \text{ لا} + \text{ب}^2 \text{ جبز}^2 \text{ لا}} = \frac{1}{\text{اب}} \text{ سن}^{-1} \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

۴۱- $\int_0^{\infty} \frac{\text{عہ فر لا}}{\text{عہ} + \text{جمز لا}} = \frac{\text{جم}^{-1} \text{ عہ}}{\sqrt{1 - \text{عہ}^2}}$ یا $\frac{\text{جمز}^{-1} \text{ عہ}}{\sqrt{\text{عہ}^2 - 1}}$ بموجب اسکے کہ $\text{عہ}^2 \lessgtr 1$

۴۲- $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{جم}^{۲}\text{عہ} - \text{جم}^{۲}\text{طہ}} = \frac{\pi}{\text{جب ۲عہ}}$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^{۲}\text{طہ فرطہ}}{\text{جم}^{۲}\text{عہ} - \text{جم}^{۲}\text{طہ}}$

$= \frac{\pi \ \text{قو عہ}}{\text{۲ جب ۲عہ}}$

امثلہ ۳۳
(تحویلی ضابطے وغیرہ)

۱- ذیل کے تکملوں کی قیمتیں لکھو

(۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۶}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{۴}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۳}\text{طہ فرطہ}$

(۲) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۲}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۳}\text{طہ جم}^{۳}\text{طہ فرطہ}$،

$\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۵}\text{طہ جم}^{۶}\text{طہ فرطہ}$

(۳) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۵}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{۰}^{\pi} \text{جم}^{۵}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{۰}^{\pi} \text{جب}^{۳}\text{طہ جم}^{۴}\text{طہ فرطہ}$

(۴) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۴}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۵}\text{طہ فرطہ}$،

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{۵}\text{طہ فرطہ}$، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{۲}\text{طہ جم}^{۳}\text{طہ فرطہ}$

۲- ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{م} (۱-\text{لا})^{ن} \text{فرلا} = \int_{۰}^{۱} \text{لا}^{ن} (۱-\text{لا})^{م} \text{فرلا}$،

ثابت کرو کہ انکی مشترک قیمت ہے $\frac{|\underline{م}\ |\underline{ن}}{|\underline{م+ن+۱}}$

۳۔ ثابت کرو کہ $\int_{-۱}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا} = ۲\int_{۰}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}$ ،

$$\int_{-۱}^{۱} \text{فا}(\text{لا}^{۲})\,\text{لا}\,\text{فرلا} = ۰$$

۴۔ ثابت کرو کہ $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \int_{۰}^{\text{ا}} \left[\text{فا}(\text{لا}) + \text{فا}(-\text{لا})\right]\text{فرلا}$

اور $\int_{-\text{ا}}^{\text{ا}} \left[\text{فا}(\text{لا}) - \text{فا}(-\text{لا})\right]\text{فرلا} = ۰$

۲۲۷ ۵۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۴}} \text{مس}^{\text{ن}}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{ن}-۱} - \text{ع}_{\text{ن}-۲}$

۶۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۲}{۶۳}$

۷۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا})^{۳}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۱۴۰}$

۸۔ $\int_{۰}^{۱} \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}(۱-\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۳\,\text{ط}}{۱۲۸}$

۹۔ $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}^{۵}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۸}{۱۵}$ ، $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{لا}^{۶}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \frac{۵}{۳۲}\,\text{ط}$

۱۰۔ $\int_{-\frac{\text{ط}}{۲}}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \text{طہ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{ط}}{۴}$ ، $\int_{-\frac{\text{ط}}{۲}}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \text{طہ}\,\text{جب}^{۲}\text{طہ}\,\text{فرطہ} = ۰$

۱۱۔ $\int_{۰}^{\text{ط}} \text{طہ}\,\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{جم}^{۲}\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{ط}}{۳}$ ، $\int_{۰}^{\text{ط}} \text{طہ}\,\text{جب}^{۲}\text{طہ}\,\text{جم}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} = -\frac{۴}{۹}$

۱۲۔ $\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۳\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{ط}}{۲}$ ، $\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۴\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{۳}{۴}$ ،

$$\int_{۰}^{\frac{\text{ط}}{۲}} \frac{\text{جب}\,۵\,\text{طہ}}{\text{جب}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ} = \frac{\text{ط}}{۲}$$

۱۳۔ $\int_0^{\pi} (\text{ا جب طہ} + \text{ب جم طہ})^5 \,\text{فر طہ} = \frac{16}{15}\text{ا}^5 + \frac{8}{3}\text{ا}^3\text{ب}^2 + 2\,\text{ا ب}^4$

۱۴۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم لا} - \text{جب لا}}{1 + \text{جب لا جم لا}} \,\text{فر لا} = 0$

۱۵۔ ثابت کرو کہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جم}^2\text{طہ فر طہ}}{\text{ا}^2\text{جم}^2\text{طہ} + \text{ب}^2\text{جب}^2\text{طہ}} = \frac{\pi}{2\,\text{ا}\,(\text{ا}+\text{ب})}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جب}^2\text{طہ فر طہ}}{\text{ا}^2\text{جم}^2\text{طہ} + \text{ب}^2\text{جب}^2\text{طہ}} = \frac{\pi}{2\,\text{ب}\,(\text{ا}+\text{ب})}$

۱۶۔ ثابت کرو کہ $\int_{-1}^{1} (1+\text{لا})^{\text{م}} (1-\text{لا})^{\text{ن}} \,\text{فر لا}$

$= 2^{\text{م}+\text{ن}+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{2\text{ن}+1}\text{طہ}\;\text{جم}^{2\text{م}+1}\text{طہ فر طہ}$

۱۷۔ ثابت کرو کہ $\int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{(1+\text{لا}^2)^{\text{ن}}}$

$= \frac{2\text{ن}-3}{2\text{ن}-2} \int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{(1+\text{لا}^2)^{\text{ن}-1}}$ [رکھو لا = مس ما]

۱۸۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$\int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{(1+\text{لا}^2)^{\text{ن}+\frac{1}{2}}} = \frac{2\times4\times6\times\cdots\cdots\times(2\text{ن}-2)}{1\times3\times5\times\cdots\cdots\times(2\text{ن}-1)}$

۱۹۔ اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$\int_0^{\infty} \frac{\text{فر لا}}{\{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+1}\}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}^2-1}$ رکھو لا = جمز ع

۲۰۔ ثابت کرو کہ $\int_0^{\infty} \frac{\text{فر ع}}{\text{جمز}^{\text{ن}}\text{ع}} = \frac{\text{ن}-2}{\text{ن}-1}\int_0^{\infty} \frac{\text{فر ع}}{\text{جمز}^{\text{ن}-2}\text{ع}}$

[رکھو جمز ع = قط طہ]

۲۲۸

۲۱۔ اگر $ع_ن = \int_{0}^{\frac{ط}{۲}} طہ\, جم^{ن}\, طہ\, فر\, طہ$ تو ثابت کرو کہ $ع_ن = -\frac{۱}{ن^۲} + \frac{ن-۱}{ن} ع_{ن-۲}$

ثابت کرو کہ $ع_۳ = ۰.....۲۶۹۴$ ؎

۲۲۔ اگر $ع_ن = \int_{0}^{۲ا} لا^{ن} \sqrt{۲ ا لا - لا^۲}\, فر لا$ تو ثابت کرو کہ

$$ع_ن = \frac{۲ن + ۱}{ن + ۲}\, ا\, ع_{ن-۱}$$

ہندسی طریق پر یا کسی اور طرح سے $ع_۰$ کی قیمت دریافت کرو اور $ع_۱$، $ع_۲$ کی قیمتیں مستنبط کرو۔

امثلہ ۳۴

۱۔ $\int_{0}^{۱} (۱-لا^۲)^{ن} فر لا$ کی قیمت پر غور کر کے ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

$$۱ - \frac{ن}{۱ \times ۳} + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲ \times ۵} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۷}$$

$$+ \ldots\ldots = \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots\ldots ۲ن}{۳ \times ۵ \times ۷ \times \ldots\ldots (۲ن+۱)}$$

۲۔ اگر $(۱+لا)^{ن} = ۱ + پ_۱ لا + پ_۲ لا^۲ + \ldots + پ_ن لا^ن$ تو ثابت کرو کہ

$$پ_۱ - \frac{۱}{۲} پ_۲ + \frac{۱}{۳} پ_۳ - \ldots + (-۱)^{ن-۱} \frac{پ_ن}{ن} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{ن}$$

۳۔ اگر ا بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلہ کا مجموعہ لاتناہی تک تقریباً $\frac{ط}{۲ا}$ ہے

$$\frac{۱}{ا^۲} + \frac{۱}{ا^۲ + ۱^۲} + \frac{۱}{ا^۲ + ۲^۲} + \ldots\ldots$$

۴۔ ثابت کرو کہ $\int_{0}^{ط} \frac{لا\, جب\, لا}{۱ + جم^۲ لا} فر لا = \frac{ط^۲}{۴}$

۵۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}+1}\text{طہ فرطہ} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$$

اس طرح ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{2}$ ، کسر

$$\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times\ldots\ldots\times2\text{ن}\times2\text{ن}}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times\ldots\ldots\times(2\text{ن}-1)(2\text{ن}+1)}$$

اور اس کسر کے درمیان واقع ہوتا ہے جو اوپر کی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں سے آخری جزو ضربی حذف کرنے سے حاصل ہو۔ (والس)۔

۶۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{سن}^{\text{ن}+1}\text{طہ فرطہ} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{سن}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$$

اس لئے امثلہ ۳۳ (۵) کا نتیجہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{سن}^{\text{ن}}\text{طہ فرطہ}$

$$\frac{1}{2(\text{ن}-1)} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2(\text{ن}+1)}$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\infty} \text{جب طہ فرطہ} \quad \text{اور} \quad \int_0^{\infty} \text{جم طہ فرطہ}$$

نا قابل تعین ہیں۔

۸۔ ترسیمی تخیلات کی بناء پر ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}\text{فرطہ}$$ محدود اور قابل تعین ہے۔

۹۔ اگر فہ (لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی اُن قیمتوں کے لئے جو ۰ اور ا کے درمیان ہیں سوائے لا = ۰ کے جس کے لئے یہ لا متناہی ہوتا ہے تو تکملہ $\int_0^{\text{ا}} \text{فہ (لا) فرلا}$ محدود ہے بشرطیکہ ایک مثبت مقدار م ایسی معلوم ہو سکتی ہے

جو ایک سے کم ہے اور

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{فہ}(\text{لا})\ \text{محدود ہے۔}\ [\text{رکھو لا} = \text{ت}^{\text{ن}}]$$

۱۰۔ اگر فہ(لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی تمام قیمتوں کے لئے تو تکملہ

$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{ذلا}$ محدود ہوگا بشرطیکہ ایک مقدار م ایسی مل سکتی ہو جو ایک سے بڑی ہے

اور $\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{فہ}(\text{لا})$ محدود ہے۔ $[\text{رکھو لا} = \text{ت}^{-\text{ن}}]$

۲۴۰ ۱۱۔ ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{جم لا}^{۲}\, \text{ذلا} \quad \text{اور} \quad \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{جب لا}^{۲}\, \text{ذلا}$$

محدود اور قابل تعین ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ $\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا} = \frac{۱}{۲}$ ، $\int_{-\infty}^{\infty} \text{لا قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا} = ۰$

۱۳۔ ثابت کرو کہ تکملہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا} \quad (\text{جہاں ن} > -۱)$$

محدود اور قابل تعین ہے۔

۱۴۔ اگر ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا} = \frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}-۲}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{۲\text{ن}+۱}\ \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}\, \text{ذلا} = \frac{۱}{۲}\,\underline{|\text{ن}}$$

۱۵۔ اگر $\text{ع}_{\text{ن}} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{ص لا}}\, \text{ذلا}$ تو ثابت کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{ص}}\ \text{ع}_{\text{ن}-۱}$

جہاں ن مثبت ہے۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن صحیح عدد ہو تو

$$\int_{\text{۰}}^{\infty} \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{-\text{ع لا}}\ \text{فر لا} = \frac{\text{ن!}}{\text{ع}^{\text{ن}+1}}$$

۱۶۔ ناقصی تکملہ $\int_{\text{۰}}^{\text{فہ}} \frac{\text{فر طہ}}{\sqrt{1-\text{ک}^2\ \text{لجب}^2\ \text{طہ}}}$ کی جدولیں زاویہ کے منٹ کے فرق پر فہ کی قیمتوں کے لئے مرتب کی گئی ہیں۔ جدول کے کسی حصہ میں متواتر اندراجوں کے فرق کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

مثلاً اگر ک = $\frac{1}{2}$، فہ = ۶۰° تو ثابت کرو کہ فرق تقریباً ۳۲۳...۰۰ء ہوگا۔

۱۷۔ اگر ف (لا) اور فہ (لا) محدود اور مسلسل ہوں اور فہ (لا) کی تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک وہی علامت رہے تو

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ف (لا) فہ (لا) فر لا} = \text{ف}\left[\text{ا} + \text{طہ (ب - ا)}\right] \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فر لا}$$

جہاں ۱ > طہ > ۰۔

۱۸۔ یہ بتاؤ کہ تعادی $\int_{1}^{\text{لا}} \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا}$ سے یہ کیونکر حاصل ہوتا ہے ۲۳۱

کہ موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$ کی ن رقموں کا مجموعہ

لوک (۱ + ن) اور ۱ + لوک ن کے درمیان واقع ہے۔

ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی دس لاکھ رقموں کا مجموعہ ۸ء۱۳ اور ۸ء۱۴ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۹۔ ترسیمی اصولوں کی بنا پر دکھاؤ کہ اگر ف (لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے جیسے لا، ۰ سے ∞ تک بڑھتا ہے تو سلسلہ

ف (۱) + ف (۲) + ف (۳) + ...

مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ت اور ت + ف (۱) کے درمیان واقع ہوتا ہے بشرطیکہ تکملہ ت = $\int_{1}^{\infty}$ ف (لا) فرلا محدود ہو۔ اس کو سلسلہ

$\frac{1}{(ن+1)^2} + \frac{1}{(ن+2)^2} + \frac{1}{(ن+3)^2} + \dots\dots$ پر استعمال کرو۔

امثلہ ۳۵

۱۔ اگر ایک گیس کا دباؤ (د) ہو اور حجم (ح) اور ان میں تعلق ہو د ح = مستقل تو حجم ح سے ح تک پھیلنے میں کام و ح لوک $\frac{ح}{ح}$ ہوگا۔

۲۔ اگر اسمیں رشتہ د ح^جما = مستقل ہو تو کام ہوگا

$$\frac{1}{جما - 1}(د ح - د_1 ح_1)$$

۳۔ ایک لچکدار رسی کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے طبعی طول پر اس کا اضافہ۔ ایک طول سے دوسرے طول تک رسی کو کھینچکر تاپنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ وہی ہے گویا تناؤ مستقل ہے اور اس کے ابتدائی اور آخری تناؤں کے نصف مجموعہ کے مساوی ہے۔

۴۔ ایک پونڈ کو لاتناہی فاصلہ سے سطح زمین تک لانے میں جاذبہ ارض جو کام کرتی ہے وہ ن فٹ' پونڈ کے مساوی ہے، جہاں زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے۔ (یہ مان لو کہ قوت جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے)

۲۳۲

آٹھواں باب

ہندسی استعمال

۹۹۔ رقبہ کی تعریف۔ اصول اقلیدس میں ایسے مسائل ثابت کئے گئے ہیں جن سے اصطلاح "رقبہ" کا ٹھیک مفہوم متعین ہوتا ہے مگر صرف اس صورت میں جبکہ اشکال بالتمام خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہوں۔ بالخصوص یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایک مستطیل کسی دی ہوئی شکل کے مساوی ایک دیے ہوئے قاعدہ پر بنایا جا سکتا ہے، یہ قاعدہ کوئی اختیاری طول ہو سکتا ہے مثلاً طول کی اکائی۔ اس شکل کا رقبہ اس نسبت کے ناپ سے تعبیر ہوگا جو اس مستطیل کو اکائی طول والے ایک مربع کے ساتھ ہے۔

اس عمل کا اطلاق ایسی شکل پر نہیں ہو سکتا جو پورے یا جزوی طور پر **منحنی** خطوط سے گھری ہوئی ہو۔ اس لئے ہمیں دیکھنا ہے کہ ایسی صورت میں "رقبہ" کے مفہوم کی تعریف کیا اختیار کی جائے۔ اسے حاصل کرنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ دو مستقیم الاضلاع شکلیں بنائی گئی ہیں ایک منحنی شکل کے باہر اور دوسری اسکے اندر، پہلی شکل کے اندر یہ منحنی رقبہ شامل ہوتا ہے اور دوسری اس منحنی رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے۔ اندرونی شکل کے رقبہ کے لئے اوپری انتہا ہے اور بیرونی شکل کے لئے نچلی انتہا ہے۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ دونوں انتہائیں منطابق ہیں۔ اس مشترک انتہائی قیمت کو از روئے تعریف دی ہوئی منحنی الاضلاع شکل کے "رقبہ" کا ناپ اختیار کیا جاتا ہے۔

مثلاً دائرہ کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۷، دفعہ ۱۷) اگر ن ق اندرونی کثیر الاضلاع کا ضلع ہو تو کثیر الاضلاع کا رقبہ ½ ∑ و ل × ن ق ہوگا۔ اب و ل نصف قطر سے کم ہے اور ∑ ن ق دائرہ کے محیط سے کم ہے۔ اس لئے اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کی اوپر کی انتہا ½ ر × ۲ π ر یا π ر² سے بڑھ نہیں سکتی جہاں دائرہ کا نیم قطر ر ہے۔ اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے رقبہ کی نچلی انتہا π ر² سے کم نہیں ہو سکتی۔ علاوہ اس کے اندرونی اور متناظر بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا فرق ہے ∑ ن ل × ل ت اور یہ کم ہے ∑ (ن ل) × صہ سے جہاں صہ، ل ت کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔ چونکہ یہ اسقدر چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں اس لئے مذکورۂ بالا اوپر کی اور نچلی انتہائیں مساوی ہیں، اس لئے ہر ایک π ر² کے مساوی ہے۔

اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ نیم قطر ر کے کسی دائرہ کے قطاع کا رقبہ ½ ر² طہ ہے جہاں طہ قطاع کا زاویہ ہے۔

۲۲۴

۱۰۰ – کارٹیزی محددوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ۔

اگر کارٹیزی محددوں میں منحنی کی مساوات

ما = فہ (لا) ....(۱)

ہو تو منحنی، محور لا اور معینوں لا = ر، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا رقبہ ہے

∫ (ر سے ب) فہ (لا) ذلا یا ∫ (ر سے ب) ما ذلا ....(۲)

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ فہ (لا) اس نمونہ کا تفاعل ہے جس کا دفعہ ۹۰ میں ذکر کیا گیا۔ نتیجہ بالا پچھلے دفعہ کی تعریف اور دفعہ ۹۰ کی تحقیق سے فوراً اخذ ہو جاتا ہے۔ اگر محور مائل ہوں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ سہ بنائیں تو عنصری مستطیل ما مف لا کی بجائے جو مجموعہ میں واقع ہوتے ہیں اور جنکی انتہا رقبہ ہے عنصری متوازی الاضلاع ما مف لا جب سہ ہونگے۔ رقبہ جو منحنی، محور لا اور احاطہ کرنے والے دو معینوں کے درمیان

گھرا ہوا ہے اب ہوگا

$$\text{ج} = \int \text{ما فرلا} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جسے دئے ہوئے خاص حدود کے درمیان لینا چاہئے۔

شکل (۵۲)

مثال ۱۔ ناقص $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$

کے ربع کا رقبہ دریافت کرو۔

$$\text{رقبہ مطلوبہ} = \int_{۰}^{\text{ا}} \text{ما فرلا} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \int_{۰}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^۲ - \text{لا}^۲}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۴}\pi\, \text{ا ب}$$

اس محدود تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں معلوم کی گئی تھی۔

اس لئے کل ناقص کا رقبہ $= \pi\ \text{ا ب}$

مثال ۲۔ قائم زائد $\text{لا}^۲ - \text{ما}^۲ = ۱ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$

کی مثبت شاخ کے لئے رکھو $\text{لا} = \text{جتز ع}،\ \text{ما} = \text{جیز ع} \quad\ldots\ldots (۶)$ ۲۲۴

کیونکہ یہ (۵) کو پورا کرتی ہیں اور ایسے لا، ما کی قیمتوں کی مطلوبہ سمت پوری ہوتی ہے منحنی محور لا اور اس معین کے درمیان کا رقبہ جس کا تعین متغیر ع سے ہوتا ہے

$$\int_{۱}^{\text{لا}} \text{ما فرلا} = \int_{۰}^{\text{ع}} \text{جیز}^۲\text{ع فرع} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\text{ع}} (\text{جتز ۲ع} - ۱)\ \text{فرع}$$

= $\frac{1}{4}$ جبز ۲ ع - $\frac{1}{2}$ ع .... (۷)

ہے۔

شکل (۵۳)

(۷) سے بائیں جانب کی شکل میں پ ا ن کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔
اس لئے زائدی قطاع و ا پ کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}$ پ ن × و ن - رقبہ پ ا ن = $\frac{1}{2}$ ع .... (۸)

ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں زائدی تفاعلوں جمز ع، جبز ع وغیرہ کے حسیطہ ع اور دائری تفاعلوں جم طہ، جب طہ وغیرہ کے حیطہ طہ میں ایک مشابہت ہے۔ ہر صورت میں تغیر متبوع نقطہ پ کے جواب ہیں جس کے محدد (جمز ع، جبز ع) یا (جم طہ، جب طہ) ہیں قطاعی رقبہ ا و پ کے دوچند کو تعبیر کرتا ہے۔

عام قطع زائد　$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ .... (۹)

کی صورت میں مثبت شاخ پر کسی نقطہ کے محدد ہیں

لا = ا جمز ع، ما = ب جبز ع .... (۱۰)

اور قطاعی رقبہ $\frac{1}{2}$ ا ب ع ہے۔

مثال ۳۔ قطع مکافی کی مساوات بلحاظ کسی قطر اور راس پر کے مماس کے ہے

$ما^2 = ۴ ر لا$ .... (۱۱)

۲۳۵

اس قطعہ مکافی کا رقبہ جسکو وتر لا = عہ کاٹتا ہے یہ ہے

$$۲\,جب\,سہ \int_{۰}^{عہ} ما\,فرلا = ۲\,ر^{\frac{۱}{۲}}\,جب\,سہ \int_{۰}^{عہ} لا^{\frac{۱}{۲}}\,فرلا$$

$$= \frac{۴}{۳}\,ر^{\frac{۱}{۲}}\,عہ^{\frac{۳}{۲}}\,جب\,سہ = \frac{۴}{۳}\,عہ\,بہ\,جب\,سہ$$

اگر ۲ بہ وتر کا طول ہو۔

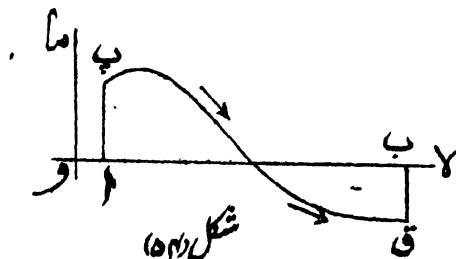
پس کسی قطعہ مکافی کا رقبہ اس مستطیل کے دو تہائی کے مساوی ہے جس کا ایک ضلع قطر پر وتر کا مقطوعہ (عہ) ہے اور دوسرا مرتب پر وتر کا ظل (۲ بہ جب سہ) ہے۔

۱۰۱ ـ رقبہ کو کیا علامت دی جانی چاہیئے؟

دفعہ ۱ میں پہلے سے یہ مان لیا گیا ہے کہ ب > ر اور معین فہ (لا) تکمل کی تمام سعت میں مثبت ہے۔ اگر ان قیود کو چھوڑ دیا جائے تو بآسانی معلوم ہوگا کہ تکملہ

$$\int_{ر}^{ب} فہ\,(لا)\,فرلا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

± س کے مساوی ہے جہاں س وہ رقبہ ہے جو منحنی، محور لا اور اطراف کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ مثبت علامت لینا چاہیئے اگر پ سے ق کی

شکل (۵۴)

سمت میں جانے سے رقبہ دائیں جانب واقع ہو اور منفی علامت (−) لینا
چاہیئے اگر رقبہ بائیں جانب واقع ہو جہاں پ ا، ق ب
لا = ا، لا = ب کے جواب میں منحنی کے معیّن ہیں‡۔ اگر منحنی ا، ب
کے درمیان محور لا کو کاٹتا ہے تو تکملہ سے رقبہ کا وہ اضافہ (مثبت یا منفی)
حاصل ہوتا ہے جو دائیں طرف والے رقبہ کو بائیں طرف والے رقبہ پر ہے۔
ان تعمیمات کے ساتھ بھی ضابطہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} = \pm \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(۲)}$$

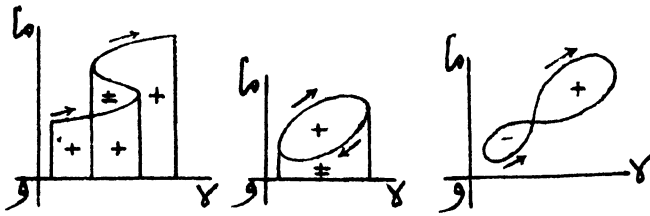
کا اطلاق صحیح طور پر اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ تمام وقفہ ب۔ ا
بھر میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما یا فہ (لا) کی ایک یگانہ قیمت
ہو۔ اگر لا کی بجائے ایک اور مقدار ت، متبوع متغیر قرار دیجائے اور
یہ ایسی ہو کہ جیسے ت بڑھے اس کا متناظر نقطہ پ مسلسل طور پر منحنی کے
ساتھ† حرکت کرے تو ضابطہ

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ما} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \text{فرت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(۳)}$$

سے عام معنوں میں وہ رقبہ تعبیر ہوگا جو منحنی، محور لا اور نقاط پ، پ۱
[جنکے لئے ت = ت۱ اور ت = ت۲] کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یعنی

---

‡ یہ مان لیا گیا ہے کہ محاور لا، ما کی سمتیں وہ ہیں جو شکل میں دکھائی
گئی ہیں۔ مقابل صورت میں الفاظ "دائیں"، "بائیں" کو باہم بدل
دینا چاہیئے۔

† مثلاً نیا متغیر منحنی کی قوس میں لی جا سکتی ہے جسے منحنی کے کسی ثابت نقطہ
سے ناپنا شروع کیا گیا ہو۔

شکل (۵۵)

معیّن ما کے دائیں جانب حرکت کرنے سے جو رقبہ کا حصہ مرتسم ہوتا ہے اُسکا اضافہ اُس رقبہ پر جو بائیں جانب حرکت کرنے سے مرتسم ہوتا ہے اِس تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے[*] یہ اِس صورت میں ہوگا جبکہ ما مثبت ہو۔ اگر ما منفی ہو تو اِس تکملہ سے رقبہ کی وہ زیادتی تعبیر ہوگی جو بائیں جانب کے مرتسم رقبہ کو دائیں جانب کے مرتسمہ رقبہ پر حاصل ہے۔

اگر ت کی کسی قیمت کے لئے، پ ایک بند منحنی مرتسم کرکے اپنے پہلے مقام پر واپس آجائے تو تکملہ

$$\int ما \frac{فرلا}{فرت} فرت \qquad \text{.................} (۴)$$

کو مناسب حدود کے درمیان لینے سے منحنی کے اندر کا رقبہ حاصل ہوگا اور اسکی علامت + یا - ملے گی بموجب اس کے کہ رقبہ پ کے دائیں یا بائیں جانب رہے جبکہ نقطہ ت کے بدلنے کے ساتھ منحنی مرتسم کرے[+]۔ اگر منحنی اپنے آپ کو کاٹے تو ضابطہ (۴) سے گھرے ہوئے رقبوں کی وہ زیادتی حاصل ہوتی جو دائیں

---

[*] دفعہ ۸۹ میں نمائندہ تصویر کا حوالہ دیا گیا ہے بھاپ نے فشارہ (پسٹن) پر آگے کی مار میں جو کام کیا اسکی زیادتی اُس کام پر جو پیچھے وار مار میں بھاپ خارج کرنے میں ہوا اُس رقبہ سے تعبیر ہوتی ہے جو منحنی کے اندر گھرا ہوا ہے۔ پس اِس رقبہ سے وہ خالص توانائی حاصل ہوتی ہے جو فشارہ کو ایک پوری ضرب میں دی گئی۔

طرف کے رقبوں کو بائیں طرف کے رقبوں پر حاصل ہے۔ (دیکھو شکل ۵۵)
بعض اوقات منحنی کا رقبہ معلوم کرنے میں یہ زیادہ سہولت مند ہوتا ہے کہ لا کی بجائے ما کو متغیر متبوع مانا جائے۔ ایسی صورت میں رقبہ جو منحنی، محور ما اور خطوط ما = ھ، ما = ک کے درمیان گھرا ہوا ہے صریحاً اسی قسم کی قیود کے تابع ذیل کے تکملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ھ}^{ک} لا\ فر ما \qquad \text{.........} (۵)$$

زیادہ عام ضابطہ (۳) کے جواب میں یہ ہوگا

$$\int_{ت}^{ت'} لا \frac{فر ما}{فر ت} فر ت \qquad \text{.........} (۶)$$

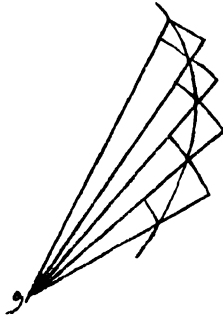
معائنہ سے معلوم ہوگا کہ علامت کا قاعدہ الٹ دیا جانا چاہئے۔

اگر ایسا کیا جائے تو جملہ $\frac{1}{2}\int \left(لا \frac{فر ما}{فر ت} - ما \frac{فر لا}{فر ت} \right) فر ت \text{....} (۷)$
سے بند منحنی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جہاں ت کے حدود ایسے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) اپنے ابتدائی مقام پر واپس آجاتا ہے۔ اب علامت کا کلیہ یہ ہے کہ جملہ (۷) مثبت ہوتا ہے جبکہ رقبہ ت کے بڑھنے کی سمت میں حرکت کرنے والے نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

۱۰۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے رقبے۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں

$$ر = فہ(طہ) \qquad \text{.........} (۱)$$

ہو تو رقبہ جو منحنی اور دو سمتی نیم قطروں طہ = عہ، طہ = بہ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{2}\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}$ رٗ فرطہ یا $\frac{1}{2}\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}$ [فہ (طہ)]ٗ فرطہ ... (۲)

کیونکہ جیسا ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے ہم دائروں کے قطاعوں کی مدد سے گھرنے والا رقبہ س اور گھرا ہوا رقبہ سَ مرتب کر سکتے ہیں۔ ان میں سے کسی ایک قطاع کا رقبہ $\frac{1}{2}$ رٗمف طہ ہے جہاں رٗ اس کا نصف قطر ہے اور مف طہ اسکا زاویہ اور اسلئے قطاعوں کے کسی ایک سلسلہ کا مجموعہ اس نمونہ کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

شکل (۵۶)

$\frac{1}{2}\sum_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}$ رٗ مف طہ .... (۳)

اس لئے سلسلہ کی یگانہ انتہا ہے جو (۲) سے تعبیر ہوتی ہے۔

یہاں مان لیا گیا ہے کہ بہ > عہ اور مبدا میں سے گذرنے والا کوئی سمتی نیم قطر قوس کو صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ لیکن اگر ایک نیا متغیر متبوع ت ایسا داخل کیا جائے کہ ت کے بڑھنے سے متناظر نقطہ پ منحنی پر مسلسل طور سے حرکت کرے تو جملہ

$\frac{1}{2}\int_{\text{ت}}^{\text{ت}}$ رٗ $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ فرت .... (۴)

خالص اس رقبہ کو تعبیر کرے گا جو سمتی نیم قطر رت بکے ت. سے ت تک جانے میں عبور کرتا ہے یعنی اس جملہ سے رقبہ کے ان حصوں کا اضافہ (مثبت یا منفی) جو طہ کے بڑھنے کی سمت میں سمتی نیم قطر کے حرکت کرنیسے مرتسم ہوتے ہیں ان حصوں پر جو

۲۲۸

مقابل سمت میں مرتسم ہوتے ہیں تعبیر ہوگا۔ علاوہ اس کے اگر ت کے بڑھنے سے نقطہ پ ایک بند منحنی مرتسم کر کے واپس اپنی ابتدائی حالت میں آجائے تو جملہ

$$\frac{۱}{۲}\int \text{ر}^{۲}\,\frac{\text{فرطھ}}{\text{فرت}}\,\text{فرت} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

سے ت کے مناسب حدود کے درمیان عام معنوں میں وہ رقبہ ملے گا جو منحنی سے گھرا ہو یعنی (ت کے بدلنے کے ساتھ جیسے نقطہ پ منحنی مرتسم کرتا ہے) اس نقطہ پ کے بائیں جانب جو رقبہ واقع ہوتا ہے اُس کی زیادتی اُس رقبہ پر جو اثنائے حرکت میں دائیں جانب واقع ہوتا ہے (یہ زیادتی) اس جملہ (۵) سے تعبیر ہوتی ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۱ کے ساتھ۔

یہ دیکھا جائے کہ ضابطہ (۵) دفعہ ۱۰۱ کے ضابطہ (۷) کا مماثل ہے۔

اگر دو ساتھ کے نقطوں پ اور ق کے محدد بالترتیب (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو عنصری مثلث و پ ق کا رقبہ علامت کی قرارداد کے ماتحت تحلیلی ہندسہ کے ایک ضابطہ کی رو سے یہ ہے

$$\frac{۱}{۲}\left(\text{لا مف ما} - \text{ما مف لا}\right)$$

ہماری موجودہ ترقیم میں $\frac{۱}{۲}\,\text{ر}^{۲}\,\text{مف طھ}$ سے وہی چیز تعبیر ہوتی ہے

مثال ۱۔ دائرہ $\text{ر} = ۲\,\text{ا جب طھ}$ .... (۶)

کا رقبہ (دیکھو شکل ۳۸ دفعہ ۶۳) ہے

$$\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi} \text{ر}^{۲}\,\text{فرطھ} = ۲\,\text{ا}^{۲}\int_{۰}^{\pi}\text{جب}^{۲}\,\text{طھ فرطھ} = \pi\,\text{ا}^{۲} \qquad \ldots (۷)$$

ماحصل یہ محض تصدیق ہے یا مثلثی تکملہ کی قیمت نئی طرح سے دریافت کرنا ہے۔

مثال ۲۔ قطع مکافی

$$\text{ر} = \frac{۲\,\text{ا}}{۱ + \text{جم طھ}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

کے قطاع کا رقبہ دو اسی قطروں کے درمیان یہ ہے

$$\frac{1}{2}\int ر^2 \, فر طہ = \frac{1}{2} ر^2 \int قط^4 \frac{طہ}{2} \, فر طہ = \frac{1}{2} ر^2 \int (1 + مس^2 \frac{طہ}{2}) قط^2 \frac{طہ}{2} \, فر طہ$$

$$= \frac{1}{2} ر^2 \left[مس \frac{طہ}{2} + \frac{1}{3} مس^3 \frac{طہ}{2} \right] \ldots\ldots (9)$$

جسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اگر حدود $-\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2}$ ہوں تو اس حصہ کا رقبہ ملتا ہے جسے وتر خاص کاٹتا ہے جو $\frac{4}{3}$ ر^2 ہے۔

۲۳۹ مثال ۳۔ قطبی محددوں میں قطع ناقص کی مساوات ہے

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{جم^2 طہ}{ا^2} + \frac{جب^2 طہ}{ب^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

اس لئے رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ا^2 ب^2 \, فر طہ}{ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ} = 2 ا^2 ب^2 \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}} \frac{فر طہ}{ا^2 جب^2 طہ + ب^2 جم^2 طہ}$$

$$\ldots\ldots\ldots (11)$$

آخری تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں $\frac{\pi}{2}$ / (ا ب) معلوم کی گئی ہے۔ اس لئے مطلوبہ رقبہ π ا ب ہے۔

۱۰۳۔ رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔

ایک متحرک خط جس کا طول مستقل یا متغیر ہے اپنی حرکت سے ایک سطح مستوی میں جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس طرح محسوب ہو سکتا ہے۔

خط کے دو متصل مقام پ ق اور پَ قَ ہیں اور انکی سمتیں ج پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ پ ق اور پَ قَ کے وسطی نقطے م اور مَ ہیں اور م س ایک دائرہ کی قوس ہے جو ج کو مرکز مان کر کھینچی جائے اگر زاویہ پ ج پَ کو مف طہ سے تعبیر کیا جائے تو آخر الامر

رقبہ پ ق قَ پَ = ∆ ق ج قَ - ∆ پ ج پَ

= ½ ج قَ² × مف طہ - ½ ج پَ² × مف طہ
= پ قَ × ½ (ج پَ + ج قَ) مف طہ
= پ قَ × ج ر × مف طہ = پ قَ × ر س

شکل نمبر ۷۵

اگر طول پ ق کو ع سے تعبیر کیا جائے اور ر کے عنصری ہٹاؤ کو مف ثہ سے جہاں یہ ہٹاؤ متحرک خط کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے تو رقبہ جو عبور ہوا اس ضابطہ سے تعبیر ہوگا

∫ ع مف ثہ ....(۱)

یہ توجہ کے قابل ہے کہ دفعات ۱۰۰، ۱۰۲ کے ضابطے اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۰۰ (۳) حاصل ہوگا اگر رکھیں

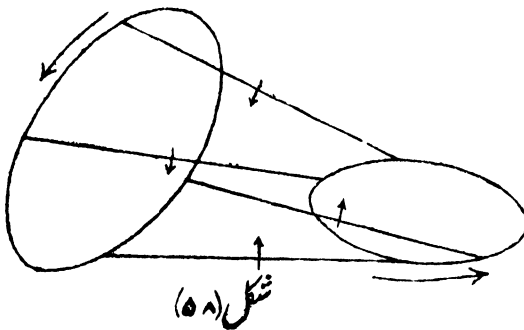
ع = ما، مف ثہ = مف لا جب سہ

مندرجہ بالا میں یہ خاموشی سے مان لیا گیا ہے کہ رقبے ہمیشہ ایک ہی سمت میں عبور ہوتے ہیں۔ لیکن یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۱) بغیر کسی ایسی قید کے لگ سکیگا بشرطیکہ رقبوں کو مثبت شمار کیا جائے جبکہ یہ خط کے اس جانب عبور ہوں جس جانب مف ثہ کو مثبت خیال کیا جاتا ہے اور اسکی متقابل سمت میں منفی۔ مثلاً جو رقبہ ایک ایسا خط مستقیم عبور کرتا ہے جس کا وسطی نقطہ ثابت ہے اس حساب کے مطابق صفر ہوگا۔

تعین کی خاطر ہم فرض کرینگے کہ مف ثہ اس صورت میں مثبت ہے جبکہ ر کی حرکت بلحاظ ایک مشاہد کے جو پ سے ق کی جانب سیدھا ایک خط مستقیم میں دیکھ رہا ہے پ ق کے بائیں جانب ہے۔ اگر پ ق کے

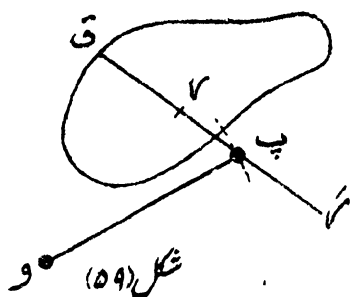
۲۴۰

سرے دو بند منحنیوں کو مرتسم کریں اور آخیر میں پ ق اپنے اصلی مقام پر آجائے تو اوپر کی قرارداد کے موافق، ق کے راستہ سے جو رقبہ محیط ہوتا ہے اسکی زیادتی اُس رقبہ پر جو پ کے راستہ سے محیط ہوتا ہے اس تکملہ (۱) سے تعبیر ہوگی بشرطیکہ اِن رقبوں کی علامتیں دفعہ ۱۰۲ کے قاعدہ کے مطابق ہوں۔

شکل (۵۸)

۱۰۴ - ایمسلر کے سطح پیما (Amsler's planimeter) کا نظریہ -

سطح پیما ایک آلہ ہے جس کی مدد سے کاغذ پر کھینچی ہوئی کسی شکل کا رقبہ آلی یا حیلی طریقہ پر دریافت کیا جاتا ہے۔

ایسے کئی آلات ایجاد ہوے ہیں* لیکن سب سے سادہ اور مقبول ایمسلر کا سطح پیما ہے جو ۱۸۵۴ء میں ایجاد ہوا - ایمسلر شاف ہاسن (سوئٹزرلینڈ) کا رہنے والا تھا - یہ آلہ دو سلاخوں وپ، پ ف پر مشتمل ہے جو آزادانہ طور پر پ پر وصل کی جاتی ہیں - سلاخ وپ ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھوم سکتی ہے - اگر ایک مرتسم نقطہ (پنسل) سلاخ پ ق کے ساتھ ق پر

* دیکھو Henrici, 'Report on Planimeters' British Ass. Rep. 1894, p. 496.

۲۴۱ لگا دیا جائے اور اس کو ایک بند منحنی کے گرد پھرایا جائے تو پ ایک دائرہ کی قوس پر آگے پیچھے اہتزاز کرے گا گویا یہ صفر رقبہ کا احاطہ طے کرے گا۔ اسلئے دفعہ ۲۰۲ کے آخر میں جو مسئلہ بیان ہوا اس کے مطابق ق نے جو رقبہ مرتسم کیا وہ مساوی ہوگا

ق
م
پ
و
شکل (۵۹)

ل فرثہ .... (۱)

کہ جہاں پ ق کا طول ل ہے اور ∫ فرثہ سے پ ق کے وسطی نقطہ م کی کلی حرکت تعبیر ہوتی ہے جبکہ ہمیشہ اس کا پ ق کے عمود کی سمت میں اندازہ کیا جائے*۔

اب جیسا کہ آلہ کے حقیقی استعمال میں عام طور پر ہوتا ہے اگر پ ق پورا چکر لگانے کے بغیر اپنے اصلی مقام پر واپس آجائے تو م کی کلی حرکت پ ق پر عمود وار سمت میں نہیں ہوگی جو خط پ ق کے کسی اور نقطہ مثلاً مَ کی ہے۔ کیونکہ اگر م، مَ کے راستوں کے متناظر اجزا مف ثہ، مف ثہَ ہوں جنھیں اوپر کی طرح ناپا گیا ہے تو

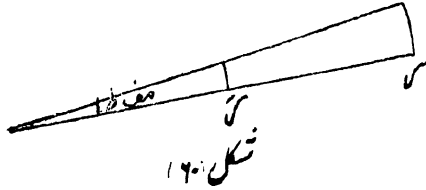
مف ثہ ـ مف ثہَ = مَ م مف طہ

جہاں مَ م کے متصل مقامات کے درمیان زاویہ مف طہ ہے۔ اسلئے

∫ مف ثہ = ∫ مف ثہَ + مَ م ∫ مف طہ = ∫ مف ثہَ ...(۲)

کیونکہ مفروضہ حالات کے ماتحت ∫ مف طہ = ۰

* بالعموم یہ وہی بات نہیں ہے جو م کے راستہ کا طول۔

شکل (۶۰)

آلہ کی حقیقی ساخت میں پہیے کی طرف خارج کئے ہوئے خط ق پ پر کے نقطہ ر کی تکملی یا کلی حرکت، سلاخ کے عمودوار ایک چھوٹے پہیہ کے ذریعے درج (Record) کی جاتی ہے جہاں پہیہ کا محور پ ق کی سمت میں ہوتا ہے جیسے ق کوئی منحنی مرتسم کرتا ہے پہیہ کاغذ کی سطح میں جس پر منحنی کھنچا ہوا ہے تھوڑا لڑکتا ہے اور تھوڑا پھسلتا ہے اور پہیہ کا گھومنا ر کے عمودی ہٹاؤ کے عین متناسب ہے۔ پہیے پر درجے لگے ہوتے ہیں اور جزوی گردشوں کے ریکارڈ کے لئے ایک ثابت نمائندہ ہوتا ہے۔ پوری گردشیں ایک Dial and counter کی مدد سے ناپی جاتی ہیں۔

طول پ ق کے بدلنے کے لئے بھی انتظام ہوتا ہے۔ اس سے محض اندراج کا پیمانہ بدلتا ہے۔

زیادہ برجستہ ثبوت تحلیلی طریق پر ہے۔ و میں سے قائم محور لو فرض کرو کہ و پ، پ ق محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب زاوئے طما اور فما بناتے ہیں رکھو و پ = ا، پ ق = ل تو ق کے محدد حسب ذیل ہیں

۲۴۲

لا = ا جم طما + ل جم فما، ما = ا جب طما + ل جب فما ..(۳)

اسلئے لا مف ما ـ ما مف لا = (ا جم طما + ل جم فما) (ا جم طما مف طما

+ ل جم فما مف فما)

+ (ا جب طما + ل جب فما) (ا جب طما مف طما + ل جب فما مف فما)

= اٗ مف طما + لٗ مف فما + ا ل جم (فما ـ طما) (مف طما + مف فما)

= مف {ا^2 طہ + ل^2 فہ + ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ۲ ا ل جم (فہ - طہ) مف طہ ...... (۴)

پ ق میں کے کسی نقطہ ر کا صغاری ہٹاؤ مف ثہ، جسے پ ق پر عمود وار ناپا جائے دو ہٹاؤں سے مرکب ہوگا، ایک ہٹاؤ پ کے لحاظ سے، دوسرا خود پ کا ہٹاؤ جسے پ ق کی عمود وار سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اسلئے اگر پ ر = ب تو

مف ثہ = ب مف فہ + ا مف طہ × جم (فہ - طہ) ...... (۵)

اس لئے $\frac{1}{2}$ (لا مف ما - ما مف لا)

= $\frac{1}{2}$ مف {ا^2 طہ + ل (ل - ب) فہ + ا ل جب (فہ - طہ)}

+ ل مف ثہ .... (۶)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ق اس طور پر پورا حلقہ ترسیم کرے کہ طہ اور فہ واپس اپنی ابتدائی قیمتوں پر عود کریں تو

$\frac{1}{2}$ ∫ (لا مف ما - ما مف لا) = ∫ ل مف ثہ ..... (۷)

دائیں جانب کا جملہ دفعہ ۱۰۱ (۷) کی رو سے اس رقبہ کے مساوی ہے جو حلقہ سے گھرا ہوا ہے۔

۱۰۵ - مجسموں کے حجم۔ ایسے مجسم کے "حجم" کی بھی عام تعریف کرنا جو بالتمام مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو کسی نہ کسی شکل میں "انتہائی قیمت" کے تخیل کو داخل کئے بغیر ناممکن ہے۔

اقلیدسی طریقوں سے یہ ضرور ثابت ہوسکتا ہے کہ دو قائم متوازی السطوحوں کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان نسبتوں سے مرکب ہوتی ہے جو ایک کے تین متراکز کناروں کو ایک ایک کرکے دوسرے کے تین متراکز کناروں کے ساتھ (نسبتیں) ہوں۔ اور زیادہ عام طور پر دو منشوروں

کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان کے ارتفاعوں کی نسبت
اور ان کے قاعدوں کی نسبت سے مرکب ہوتی ہے۔ اس طریق پر کسی منشور اور
اکائی مکعب کی باہمی نسبت کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

لیکن ایک دئے ہوئے کثیر السطوح کو منشوروں کی محدود تعداد میں کاٹنا
عام طور پر ممکن نہیں۔ سادہ اور عام طریقہ یہ ہے کہ اس کو مضلع مخروطوں (میناروں)
میں کاٹا جائے جن کے مشترک راس اندر کے کسی نقطہ پر ملیں اور کثیر سطحی کے
چہرے ان کے قاعدے ہوں۔ لیکن مینار اور منشور کے حجموں کا مقابلہ بغیر انتہائی
قیمت کے تخیل کو داخل کرنے کے نہیں ہوسکتا۔ مثلثی منشور کو البتہ مساوی ارتفاع
اور مساوی قاعدوں والے تین میناروں میں کاٹا جاسکتا ہے (اقلیدس ۱۲، ۷)۔ ۳۴۴
لیکن صغاری عناصر کے تخیل کو شامل کئے بغیر ان میناروں کو آپس میں مساوی ثابت
نہیں کیا جاسکتا۔

ایسے مجسم کے حجم کی عام تعریف جو کسی طرح کی سطحوں مستوی یا منحنی سے
گھرا ہوا ہو ایسے ہی مرتب ہوسکتی ہے جیسے مستوی شکل کے رقبہ کی صورت میں
(شکل ۹۹)۔ ہمیشہ دو شکلیں بنانا ممکن ہوگا جو منشوروں سے بنی ہوئی ہوں،
ان میں سے ایک دئے ہوئے مجسم کو گھیرے اور دوسری مجسم سے گھری ہوئی ہو
اور ان کے حجموں کا فرق اتنا کم ہوسکتا ہم چاہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل
کے حجم کی انتہائی قیمت کو جب ان شکلوں کا فرق لا انتہا کم ہو جائے بطور تعریف
کے اختیار کر لیا جاتا ہے کہ یہ دئے ہوئے مجسم کا "حجم" ہے۔ پہلے کی طرح ہم
اس امر کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے۔

مستوی متوازی سروں والے کسی اسطوانہ (قائم یا مائل) کا حجم کسی سرے
کے رقبہ اور سروں کے درمیان کے عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی
ہوتا ہے۔ کیونکہ حائط اور نیز محیط منشوری شکلیں بنائی جاسکتی ہیں جن کے قاعدے
ایسے کثیر الاضلاع ہیں جو اسطوانہ کے قاعدہ کا احاطہ کرتے ہیں اور اس سے
محیط ہوجاتے ہیں۔ اوپر کا بیان ان میں سے ہر شکل کے لئے درست ہے۔ اسلئے انتہا لینے میں
اسطوانہ کے لئے بھی درست ہے۔ دائری اسطوانہ کا حجم اسلئے $\pi r^2 h$ ہے

جہاں ا قاعدہ کا نصف قطر ہے اور ف اس کا ارتفاع۔ اسی طرح متوازی مستوی سروں والے اسطوانہ کا حجم معلوم ہوگیا۔ اب اگر ہم چاہیں تو بطور ضمنی اشکال کے جو اوپر عام تعریف میں استعمال کی گئی ہیں منشوروں کی بجائے ایسے اسطوانے استعمال کر سکتے ہیں۔ کسی طریقہ سے بھی آخری انتہا لازماً وہی ہونی چاہیئے۔

۱۰۶۔ کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ۔

محور لا کو کسی مناسب سمت میں کھینچ لیا جائے۔ مبدأ سے فاصلہ لا پر ایک سطح مستوی لیکر جو محور پر عمود ہو اگر مجسم کو تراشا جائے تو فرض کرو کہ اس تراش کا رقبہ ف (لا) ہے۔ اگر وقفہ مف لا پر محور لا کے عمود دار مستوی سطحوں کا نظام کھینچا جائے تو ظاہر ہے کہ حجم مطلوبہ ذیل کے مجموعہ کی انتہا ہوگی

$$\sum \text{ف (لا) مف لا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

کیونکہ اس مجموعہ کا ہر جزو ایک اسطوانہ کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کا ارتفاع مف لا ہے اور قاعدہ ف (لا)۔ اسلئے حجم مطلوبہ حاصل ہوگا اس ضابطہ سے

$$\int \text{ف (لا) فرلا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں لا کو مناسب حدود کے اندر لیا جانا چاہیئے۔

مثال ۱۔ مخروط (یا مینار) کی صورت میں جو قائم یا مائل ہو اور کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مبدأ و راس پر لو اور محور لا قاعدہ پر عمود دار۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ ا ہے، اور ارتفاع ف تو مبدأ و سے فاصلہ لا پر تراش کا رقبہ

$$\text{ف (لا)} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}\right)^{۲} \text{ا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

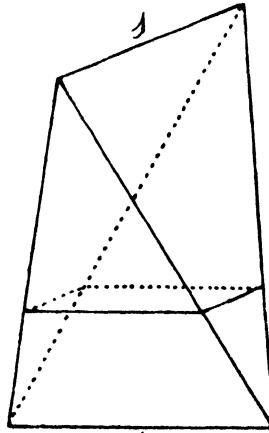
کیونکہ مشابہ رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ اس لئے حجم

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ف}^{۲}} \int_{\cdot}^{\text{ف}} \text{لا}^{۲} \text{ فرلا} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۳}\text{ ف ا} \qquad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

۲۴۴

یعنی قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے ایک تہائی کے مساوی ہے ۔

مثال ۲ ۔ چار سطحی کا حجم ہے $\frac{1}{6}$ ص ا اَ جب عہ .... (۵)

جہاں ا، اَ متقابل کے کناروں کے طول ہیں، ص اِن کے درمیان کم سے کم فاصلہ ہے اور عہ انکی سمتوں کے درمیان زاویہ ہے ۔

شکل (۶۱)

چار سطحی کو سروں ا، اَ کے متوازی سطحوں سے تراش کر باریک پتروں یا چادروں میں تقسیم کرو ۔ یہ تراشیں کم سے کم فاصلہ ص پر عمود وار ہونگی ۔ شکل (۶۱) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ نظام کے اُس مستوی کی تراش جو سرے ا سے فاصلہ لا پر واقع ہے ایک متوازی الاضلاع شکل ہوگی جس کے اضلاع ہیں

$$\frac{لا}{ص} \times اَ \qquad \text{اور} \qquad \frac{ص - لا}{ص} \times ا$$

اور اس کا رقبہ ہے　$\frac{ا\,اَ\,لا}{ص^2}$ (ص ۔ لا) جب عہ

اس لئے چار سطحی کا حجم ہے $= \frac{ا\,اَ}{ص^2}$ جب عہ $\int^{ص}$ لا (ص ۔ لا) ءلا

جو دی ہوئی قیمت میں تحویل ہوجاتا ہے۔

۱۰۷ – گردشی مجسم۔ فرض کرو کہ تکوینی منحنی

$$ما = فہا (لا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے، محور لا تشاکل کا محور ہے اور مجسم مستوی سیروں سے گھرا ہوا ہے جو محور لا پر عمود ہیں۔ اس صورت میں رقبہ ف (لا) اس دائرہ کا رقبہ ہے جس کا نیم قطر ما ہے اور یہ π ما^۲ ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ حجم ہے

$$\int \pi\, ما^۲\, فرلا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ دراصل اس مجموعہ کا ہر عنصر، جسکی انتہا اوپر کا تکملہ ہے ایک گول تختی کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کی موٹائی مف لا ہے اور رقبہ π ما^۲۔

مثال ۱۔ دائرہ کی مساوات جبکہ مبدا اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ہو یہ ہے

$$ما^۲ = لا (۲ ا - لا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس لئے قطعہ کرہ کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_{0}^{ف} لا (۲ ا - لا)\, فرلا = \pi \left[ا لا^۲ - \frac{لا^۳}{۳} \right]_{0}^{ف}$$

$$= \pi ف^۲ (ا - \frac{ف}{۳}) \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں ا کرہ کا نیم قطر ہے۔ پورے کرہ کے لئے ف = ۲ ا اور حجم ہے $\frac{۴ \pi ا^۳}{۳}$

یا حائط مستدیر اسطوانہ کے حجم (π ا^۲ × ۲ ا) کا دو تہائی۔

مثال ۲۔ منحنی $ما^۲ = ۴ ا لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$

کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مکافی نما پیدا ہوتا ہے اس کے قطعہ یا حصے کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int_{ب}^{ف} ما^2 \, فر لا = ۴\pi ا \left[\frac{لا^2}{۲} \right]_{ب}^{ف} = ۲\pi ا ف^2 \quad \ldots\ldots (۶)$$

اگر قاعدہ کا نیم قطر ب ہو تو $ب^2 = ۴ ا ف$۔ اس لئے حجم ہے $\frac{۱}{۲}\pi ب^2 \times ف$ یا اسی قاعدہ اور اسی بلندی کے اسطوانہ کے حجم کا آدھا۔

۲۴۶

مثال ۳۔ لنگر چھلے کا حجم دریافت کرو جو دائرہ

$$لا^2 + (ما - ا)^2 = ب^2 \quad \ldots\ldots (۷)$$

کو محور لا کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے جہاں $ا > ب$ دیکھو شکل (۴۶)۔ ب کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں فرض کرو $ما_۱$، $ما_۲$ یعنی

$$ما_۱ = ا + \sqrt{ب^2 - لا^2}، \quad ما_۲ = ا - \sqrt{ب^2 - لا^2} \quad \ldots (۸)$$

چھلے کی تراشش کا رقبہ جبکہ اسے محور لا پر عمود وار مستوی سے کاٹا جائے ہوگا

$$\pi ما_۱^2 - \pi ما_۲^2 = ۴\pi ا \sqrt{ب^2 - لا^2} \quad \ldots\ldots (۹)$$

اور مطلوبہ حجم ہے

$$۴\pi ا \int_{-ب}^{ب} \sqrt{ب^2 - لا^2} \, فر لا = ۲\pi^2 ا ب^2 \quad \ldots (۱۰)$$

دفعہ ۹۶ مثال ۵ کی رو سے۔

یہ حجم اس اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کی تراشش ($\pi ب^2$) چھلے کی تراشش کے مساوی ہو اور جس کا طول ($۲\pi ا$) اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہو جو تکوینی دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے

۱۰۸ – بعض متعلق صورتیں

دفعہ ۱۰۶ کے عام ضابطہ (۲) کی اور مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص مکانی نما

$$۲ لا = \frac{ما^2}{پ} + \frac{ی^2}{ق} \quad \ldots\ldots (۱)$$

کی تراشش مستوی لا = مستقل سے ایک ناقص ہے جس کے نیم محور $\sqrt{۲ پ لا}$ اور

$\sqrt{۲ ق لا}$ ہیں اور اس لئے اسکا رقبہ $۲\pi\sqrt{پ ق لا}$ ہے

اس لئے مستوی لا = ف مجسم سے جو قطعہ کاٹتا ہے اس کا حجم ہے

$$۲\pi\sqrt{پ ق}\int_{۰}^{ف} لا\, فرلا = \pi\sqrt{پ ق}\, ف^{۲} \quad ....(۲)$$

یہ اُس اسطوانہ کے نصف حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ف ہو اور وہ اسی ناقصی قاعدہ پر قائم ہو۔

مثال ۲۔ ناقص نما

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ی^{۲}}{ج^{۲}} = ۱ \quad ....(۳)$$

میں مستوی لا = مستقل سے تراش ایک ناقص ہے جس کے نیم محور ہیں

$$ب\sqrt{۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}} \quad اور \quad ج\sqrt{۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}} \quad ....(۴)$$

اور جس کا رقبہ ہے

$$\pi\, ب\, ج\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right) \quad ....(۵)$$

۲۴۷ کسی دو مستویوں کے درمیان کے حصہ کا حجم جبکہ یہ مستوی محور لا پر عمود وار ہوں یہ ہے

$$\pi\, ب\, ج\int\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}\right) فرلا \quad ....(۶)$$

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ کل حجم کے لئے لا کے حدود $\pm ا$ ہیں اور کل حجم ہے $\frac{۴}{۳}\pi\, ا\, ب\, ج$۔

۱۰۹ – سمپسن کا قاعدہ۔ اوپر کے اکثر نتائج دراصل ایک عام ضابطہ میں شامل ہیں جو ایسی تمام صورتوں میں لگ سکتا ہے جہاں محور لا پر عمود وار مستوی تراش کا رقبہ لا کا دوسرے درجہ کا تفاعل ہو۔ ایسی صورت میں دو متوازی مستویوں کے درمیان کا حجم محض ان تراشوں

کے رقبوں اور ان کے عین درمیان کی تراش سے کے رتبے اور سیروں کے مستویوں کے درمیان کے وقفے (۲ ف) کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے
چونکہ دو درجی تفاعل کی صورت لا میں ایک مستقل جمع کرنے سے نہیں بدلتی، ہم مبدا کو بآسانی وسطی تراش میں لے سکتے ہیں۔ رکھو

ف (لا) = ا + ب لا + ج $لا^۲$ .... (۱)

اس طرح

$\int_{-ف}^{ف}$ ف (لا) فرلا = ۲ اف + $\frac{۲ ج ف^۳}{۳}$ .... (۲)

تراشوں لا = - ف، لا = ۰، لا = ف کے رقبوں کو بالترتیب $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ سے تعبیر کرو، اس طرح

ا - ب ف + ج $ف^۲$ = $س_۱$، ا = $س_۲$، ا + ب ف + ج $ف^۲$ = $س_۳$

.... (۳)

جس سے $\int_{-ف}^{ف}$ ف (لا) فرلا = $\frac{۱}{۳}$ ف ($س_۱$ + ۴ $س_۲$ + $س_۳$)

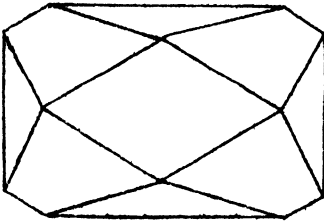
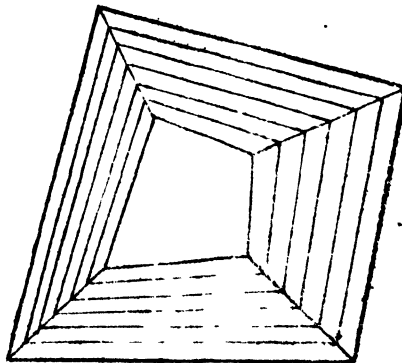
.... (۴)

یہی وہ ضابطہ ہے جسکی طرف اوپر اشارہ کیا گیا ہے۔ اسکی تعبیر یہ بھی ہو سکتی ہے کہ مجسم کی اوسط تراش ہے

$\frac{۱}{۶}$ ($س_۱$ + ۴ $س_۲$ + $س_۳$) .... (۵)

یہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ (۱) میں رقم د $لا^۳$ کا اضافہ (۴) کی شکل پر کوئی اثر نہیں رکھیگا۔ پس اس نتیجہ کی توسیع ایسی صورت کے لئے بھی ہوگئی ہے جہاں ف (لا) تیسرے درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) صریحاً مخروط، مخروط مضلع یا کرہ کی صورت میں لگ سکتا ہے نیز یہ مکافی نما، ناقص نما یا زائد نما کی صورت میں بھی لگ سکتا ہے بشرطیکہ

احاطہ کرنے والی تراشیں صدری محور پر عمود وار ہوں۔ جو طالب علم درجہ دوم کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے وہ آسانی سے دیکھ لیگا کہ یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ ایسے مجسم کی صورت بھی موجودہ قاعدہ کے تحت آتی ہے جہاں مجسم دو متوازی مستوی کثیر زاوی رخوں اور اطراف میں مستوی رخوں سے جو مثلث ہوں یا منحرف گھرا ہوا ہو۔ اسمیں ہم وہ صورت بھی شامل کر سکتے ہیں جہاں بعض یا سب طرفی پہلو ایسی منحنی سطحیں ہوں (زائدی مکافی نما) جن کی تکوین خطوط مستقیم سے ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے مستویوں کے متوازی حرکت کرتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک خط دو ایسے خطوط مستقیم کو قطع کرتا ہے جن میں سے ہر ایک ایک کثیر الاضلاع کے ایک راس کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ایک راس سے ساتھ ملاتا ہے۔

شکل (۶۲)

شکل (۶۳)

اور چونکہ ہر کثیرالاضلاعی رخ میں اضلاع کی تعداد لاانتہا بڑھائی جاسکتی ہے' یہ قاعدہ اُس مجسم کی صورت میں بھی لگیگا جو دو مستوی متوازی رخوں سے اور ایک ایسی منحنی سطح سے گھرا ہوا ہو جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے اور یہ خط ہمیشہ ان رخون کے محیطوں سے ملتا ہے۔

مثال ۱۔ ناکمل قائم مستدیر مخروط کا حجم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مستوی سروں کے نصف قطر ا' ب ہیں۔ تو وسطی تراش کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ (ا + ب) ہے۔ پس

$$س_1 = \pi ا^2 ، س_2 = \frac{\pi}{4} (ا + ب)^2 ، س_3 = \pi ب^2$$

اس لئے حجم ہے $\frac{1}{3} \pi ف (ا^2 + ا ب + ب^2)$ .... (۶)

جہاں ناکمل کا ارتفاع ف ہے۔

مثال ۲۔ نصف قطر ا کے مجسم کرہ میں، نصف قطر ب کا ایک اسطوانی سوراخ مرکز میں سے بنایا گیا ہے۔ باقی ماندہ حجم دریافت کرو۔

$$یہاں\ س_1 = ۰ ، س_2 = \pi (ا^2 - ب^2) ، س_3 = ۰$$

اسلئے اوسط تراش $\frac{2}{3} \pi (ا^2 - ب^2)$ ہے۔ سوراخ کا طول $2 \sqrt{ا^2 - ب^2}$ ہے۔ مطلوبہ حجم اس لئے ہے $\frac{4}{3} \pi (ا^2 - ب^2)^{\frac{3}{2}}$ .... (۷)

۱۱۰۔ منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا۔

مستقیم الاضلاع شکل کا محیط وہ طول ہے جو شکل کے مختلف اضلاع کے مساوی طول لیکر ان کو ترتیب وار ایک ہی خط مستقیم میں سروں پر سرے رکھنے سے حاصل ہو۔

چونکہ منحنی خط خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو خط مستقیم کے کسی حصہ پر یوں منطبق نہیں کیا جاسکتا' اس لئے اس امر کی تعریف مطلوب ہے کہ ایک منحنی کے "طول" سے کیا مراد ہے۔ عام طور پر یہ تعریف اختیار کیجاتی ہے کہ یہ طول اُن حدود

بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا ہے جبکہ اضلاع کا طول لا انتہا کم ہو جائے۔
یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سوائے شاید تنہا نقطوں کے منحنی کا ڈھال مسلسل ہے یعنی کسی دو متصل نقطوں پ اور ق کے مماسوں کا باہمی میلان، ق کو پ کے کافی قریب لانے سے اتنا کم کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ تمام قیود کے ماتحت مذکورہ بالا انتہا یگانہ ہے، نیز یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ انتہا، باہر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کی متناظر انتہا کے مساوی ہے۔
اگر منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور ق کے کارٹیزی محدد (لا، ما) اور

(لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو وتر پ ق کا طول ہے $\sqrt{(\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2}$

دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ محدود اور مسلسل ہوں تو نسبت

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$، پ اور ق کے درمیان منحنی کے کسی ایک نقطہ کے لئے مشتق سے

تفاعل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت کے مساوی ہے۔ اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مناسب قیمت منتخب کرنے

$$\text{پ ق} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{مف لا}$$

اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی قیمت اس لئے یہ ہے

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}\ \text{فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

جبکہ اس تکمل کو لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اس امر کو کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے دفعہ ۹۰ میں ثابت کیا گیا ہے۔
اگر لا کو ما کا تفاعل خیال کیا جائے تو متناظر ضابطہ ہوگا

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^2}\ \text{فر ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

۲۵۰ منحنی کی قوس کو س سے تعبیر کرو جبکہ قوس کو ایک اختیاری نقطہ (لا) سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اور دفعہ ۶۰ کی مانند رکھو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس پہ ما تو ضابطہ (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{س} = \int_{\text{لا}_0}^{\text{لا}} \text{قط پہ ما فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ضابطہ (۲) کے لئے مماثل استحالہ موجود ہے۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$

میں $\int \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{۱ + \text{جبز}^۲ \frac{\text{لا}}{\text{ج}}}\ \text{فر لا}$

$$= \int \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}\ \text{فر لا} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$$

چونکہ یہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس لئے سب سے نچلے نقطہ سے اگر س کو ناپا جائے تو

$$\text{س} = \text{ج جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

مثال ۲۔ مکافی $\text{ما}^۲ = ۴\ \text{ا لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$

میں $\int \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^۲}\ \text{فر لا} = \int \sqrt{\frac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا}}}\ \text{فر لا} \ldots (۷)$

شمار کنندہ کو پہلے منطق بنانے سے 'دفعہ ۶، کے طریقہ سے اسے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ یا رکھو لا = ا جبز^۲ ع ، اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$۲\text{ا} \int \text{جمز}^۲ \text{ع فر ع} = \text{ا} \int (۱ + \text{جمز ۲ ع})\ \text{فر ع} = \text{ا} (\text{ع} + \tfrac{۱}{۲}\ \text{جبز ۲ ع}) \ldots\ldots (۸)$$

چونکہ ع، لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے، اس سے قوس کا طول ملتا ہے جبکہ قوس کو راس سے ناپا جائے۔

مثال وتر خاص یا معدل کے سرے پر جبنا ع = ۱، جمن ع = $\sqrt{2}$،
ع = لوک ($1 + \sqrt{2}$)، جس سے قوس کا طول اس سرے تک ہے

$$\text{لوک}(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\ ] = 1{,}2296\ ۱/۲$$

۱۱۱۔ تعمیم شدہ ضابطے ۔ یہ اوپر کی تعریف کا نتیجہ ہے کہ کسی منحنی کی لاانتہا چھوٹی قوس، وتر پ ق کے ساتھ انتہا میں نسبت مساوات رکھتی ہے۔

۲۵۱ اس مسئلہ کے باضابطہ ثبوت کے لئے جو دفعہ ۲۲ (۲) کی تعمیم ہے فرض کرو کہ پ پ$_1$، پ$_1$ پ$_2$، ..... پ$_{ن-1}$ ق کھلے کثیر الاضلاع کے ضلعے ہیں جو قوس کے اندر بنایا گیا ہے اور صہ$_1$، صہ$_2$، صہ$_3$، .... صہ$_ن$ وہ زاوے (مثبت، منفی) ہیں جو یہ ضلعے وتر پ ق کے ساتھ بناتے ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ

$$\text{پ ق} < \text{پ پ}_1 + \text{پ}_1\text{ پ}_2 + \ldots\ldots + \text{پ}_{ن-1}\text{ ق} \quad \ldots\ldots (1)$$

بخلاف اس کے

$$\text{پ ق} = \text{پ پ}_1 \text{ جم صہ}_1 + \text{پ}_1\text{ پ}_2 \text{ جم صہ}_2 + \ldots\ldots + \text{پ}_{ن-1}\text{ ق جم صہ}_ن$$

$$> (\text{پ پ}_1 + \text{پ}_1\text{ پ}_2 + \ldots\ldots + \text{پ}_{ن-1}\text{ ق}) \text{ جم صہ} \quad \ldots (2)$$

جہاں مطلق قیمت کے لحاظ سے صہ تمام زاویوں صہ$_1$، صہ$_2$، ... صہ$_ن$ سے بڑا ہے۔ اس لئے نسبت

$$\frac{\text{پ ق}}{\text{پ پ}_1 + \text{پ}_1\text{ پ}_2 + \ldots\ldots \text{پ}_{ن-1}\text{ ق}} \quad \ldots\ldots (3)$$

ایک اور جم صہ کے درمیان واقع ہے۔ چونکہ وتر پ پ$_1$، پ$_1$ پ$_2$... پ$_{ن-1}$ ق نیز پ ق اپنی قوسوں کے متوازی ہیں جو ان کے مختلف سروں کے درمیان کے نقطوں پر کھینچے جائیں اسلئے ڈھال کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق کو پ کے کافی طور پر قریب لینے سے |صہ| اتنا چھوٹا کیا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اسلئے اس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔

دفعہ سابق کے (۳) کو بلحاظ تکمل کی اوپر کی حد (لا) کے تفرق کرنے سے اسکی باآسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}\ \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} = \text{قط پ}_{\text{ہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

چونکہ جب ق کو پ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے وتر پ ق کی مف لا کے ساتھ جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت قط پہ ہے اسلئے انتہا میں

$$\text{نہا}\ \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اوپر کے اصول سے کئی ضروری ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ سب سے پہلے اگر منحنی کے کسی نقطہ پ کے محددلا، ما، قوس س کے تفاعل خیال کئے جائیں تو شکل ۱۹ دفعہ ۲۴ کے بموجب

$$\text{جم ق پ ر} = \frac{\text{پ ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{جب ق پ ر} = \frac{\text{ق ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}}$$

اس لئے

$$\text{جم پ}_{\text{ہ}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}\ ،\ \text{جب پ}_{\text{ہ}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}\right)^{۲} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

نیز اگر لا، ما کسی اور متغیر ت کے تفاعل ہوں تو

$$\text{پ ق} = \sqrt{\left(\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}}\right)^{۲}}\ \text{مف ت}$$

اس لئے

$$\text{نہا}\ \frac{\text{پ ق}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}}$$

یا $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}}$ ....(۸)

اس لئے $\text{س} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}}\ \text{فرت}$ ....(۹)

اسے دفعہ ۱۱۰ (۱) کی تعمیم خیال کیا جا سکتا ہے ۔ وہ ضابطہ اس مفروضہ کی بنا پر حاصل کیا گیا تھا کہ قوس زیر بحث کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی صرف ایک قیمت ہے۔ نتیجہ (۹) اس قید سے آزاد ہے ۔ صرف اتنا ضروری ہے کہ جیسے ت بڑھے نقطہ پ منحنی کو مسلسل طور پر مرتسم کرے ۔

اسی طرح ضابطہ (۶) کسی قابل تخطیط منحنی کا طول معلوم کرنیکے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ پما سے وہ زاویہ مراد لیا جائے جو س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا ہوا مماس محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے ۔

صریحاً ضابطوں (۸) اور (۹) کی علم حرکت میں تعبیریں مل سکتی ہیں ۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے کارٹیزی محددوں لا ، ما کو وقت ت کے تفاعل خیال کیا جائے تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ محددوں کے محوروں کی سمت میں ترکیبی رفتاریں ہیں اور اگر ع حقیقی رفتار ہو تو

$\text{ع} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲}}$ ....(۱۰)

ضابطے (۸) اور (۹) اس طرح ذیل کے ضابطوں کے معادل ہیں

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع}$ ، $\text{س} = \int \text{ع}\ \text{فرت}$ ....(۱۱)

مثال ۔ قطع ناقص $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جب}\ \text{فہ}$ ، $\text{ما} = \text{ب}\ \text{جم}\ \text{فہ}$ ......(۱۲)

میں $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}}\right)^{۲} = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرفہ}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرفہ}}\right)^{۲} = \text{ا}^{۲}\ \text{جم}^{۲}\ \text{فہ} + \text{ب}^{۲}\ \text{جب}^{۲}\ \text{فہ}$

$= \text{ا}^{۲} (۱ - \text{ز}^{۲}\ \text{جب}^{۲}\ \text{فہ})$ جہاں ز خروج المرکز ہے ۔

پس اگر قوس کو محور اصغر کے سرے سے ناپا جائے تو قوس

$$س = ا \int_{0}^{فہ} \sqrt{1 - ز^2 جب^2 فہ} \; فرفہ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

یہ تکملہ ریاضی کے معمولی تفاعلوں کی رقوم میں (محدود صورت میں) نہیں بیان ہو سکتا۔ اسے "دوسری قسم کا ناقصی تکملہ" کہا جاتا ہے اسے ہم ن (ز، فہ) [E (e, φ)] سے تعبیر کرینگے۔ یہ ایک معلومہ تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے لیژانڈر* نے اسکی جدولیں مرتب کی ہیں۔ اس لئے ناقص کا کل محیط اس طرح بیان ہو سکتا ہے

$$۴ ا \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - ز^2 جب^2 فہ} \; فرفہ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اس جملہ کے تکملہ کو اس طرح ن (ز، $\frac{\pi}{2}$) بیان کیا جائیگا یا زیادہ اختصار کے طور پر ن۱ (ز) سے۔ یہ دوسری قسم کا "پورا ناقصی تکملہ کہلاتا ہے"+ مقدار ز تکملہ کا "مقیاس" کہلاتی ہے۔

سلسلوں کے ذریعہ تکملہ (۱۴) کی قیمت معلوم کرنیکے متعلق دیکھو دفعہ ۱۸۰۔

۱۱۲۔ قطبی محددوں کے لحاظ سے قوسیں۔

فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نیم قطر وپ، وپَ ہیں اور پ ن، وپَ پر عمود کھینچا گیا ہے لکھو

وپ = ر، وپَ = ر + مف ر، ∠ پ و پَ = مف طہ

تب دفعہ ۶۳ کے بموجب، پ ن متفاوت ہوگا ر مف طہ سے اور ن پَ متفاوت ہوگا مف ر سے بقدر ایسی مقداروں کے جو بالترتیب پ ن، ن پَ کے مقابلہ میں لاانتہا چھوٹی ہونگی۔ اسلئے پ پَ یا $\sqrt{پ ن^2 + ن پَ^2}$

---

* Traite des Fonctions Elliptiques (1826)

+ "پہلی قسم" کا ناقصی تکملہ ہے $\int_{0}^{فہ} \frac{فرفہ}{\sqrt{1 - ز^2 جب^2 فہ}}$ اور اسے ہم ق (ز، فہ) [F (e, φ)] سے تعبیر کریں گے۔ متناظر "پورا" تکملہ [جسکی اوپر کی حد $\frac{\pi}{2}$ ہے] ق۱ (ز) سے تعبیر ہوگا۔

انتہا میں $\sqrt{ر^2 (\text{مف}\, ط)^2 + (\text{مف}\, ر)^2}$ کے ساتھ مساوات کی نسبت رکھیگا۔
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ متبوع متغیر ہو تو

$$\frac{\text{فر} س}{\text{فر} ط} = \text{نہا} \frac{پ پَ}{\text{مف}\, ط} = \sqrt{ر^2 + \left(\frac{\text{فر} ر}{\text{فر} ط}\right)^2} \ldots\ldots (1)$$

اور اس لئے

$$س = \int \sqrt{ر^2 + \left(\frac{\text{فر} ر}{\text{فر} ط}\right)^2}\ \text{فر} ط \ldots\ldots\ldots (2)$$

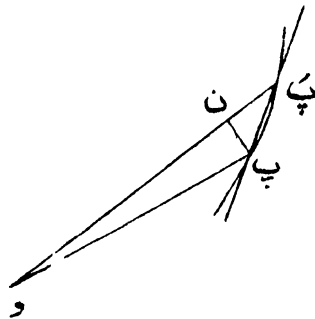
بشرطیکہ تکملہ کو طہ کے مناسب حدود کے اندر لیا جائے۔
اگر ر اور طہ متغیر متبوع ت کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فر} س}{\text{فر} ت} = \text{نہا} \frac{پ پَ}{\text{مف}\, ت} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر} ر}{\text{فر} ت}\right)^2 + ر^2 \left(\frac{\text{فر} ط}{\text{فر} ت}\right)^2} \ldots\ldots (3)$$

اس لئے

$$س = \int \sqrt{\left(\frac{\text{فر} ر}{\text{فر} ت}\right)^2 + ر^2 \left(\frac{\text{فر} ط}{\text{فر} ت}\right)^2}\ \text{فر} ت \ldots\ldots (4)$$

۲۵۴

جس میں (۲) بطور خاص صورت کے شامل ہے۔

شکل (۶۴)

اگر ر، طہ کو قوس س کے تفاعل خیال کیا جائے اور فہ سے وہ زاویہ مراد ہو جو منحنی کا مماس جسے س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے، سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے تو

جم ن پَ پ = ن پَ / پ پَ ، جب ن پَ پ = پ ن / پ پَ

اس لئے انتہا میں جم فہ = فر ر / فر س ، جب فہ = ر فر طہ / فر س ......(۵)

اِن نتائج کی حرکیاتی توضیح ہوسکتی ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع سے تعبیر ہو تو سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس کے علی القوائم رفتاریں بالترتیب ہونگی

ع جم فہ = فر ر / فر س × فر س / فر ت = فر ر / فر ت

ع جب فہ = ر فر طہ / فر س × فر س / فر ت = ر فر طہ / فر ت ......(۶)

اور ضابطہ (۴) پہلے کی طرح اس کے معادل ہے

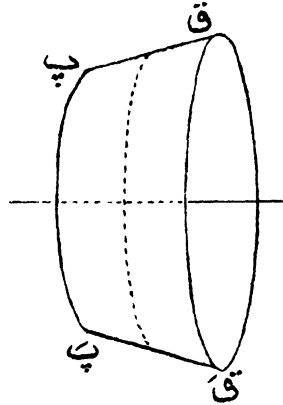
س = ∫ ع فر ت ....(۷)

۱۱۳۔ گردشی سطحوں کے رقبے۔ منحنی سطح کے رقبہ کی عام تعریف

مرتب کرنا اور پھر یہ ثابت کرنا کہ اس رقبہ کی ایک معین قیمت ہے یہ امور ایک حد تک نفاست طلب ہیں۔ اس جگہ ہم ایسی گردشی سطح کو بحث میں لائینگے جو محور پر علی القوائم مستوی سطحوں سے محدود ہو (محدود ہونا ضروری نہیں)۔ ۲۵۵

دائری اسطوانے سے ہم شروع کرتے ہیں۔ اسکی منحنی سطح کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ یہ اندر بنے ہوے منشور کے طرفی رخوں کے رقبوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے۔ اِن سب رخوں کا ایک ہی طول ہے اور ان کا مجموعہ اس مشترک طول اور منشور کی قلیبی تراش کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہا میں یہ محیط اسطوانہ کا محیط ہو جاتا ہے۔ اس لئے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح جس کا نیم قطر ا اور ارتفاع ف ہو ۲ π ا ف ہے۔

اس کے بعد مخروط کی سطح لو جو محور پر عمود دار دو مستویوں کے درمیان گھری ہوئی ہے۔

اس کے اندر ناقص مخروط مضلع بنایا جا سکتا ہے جس کے قاعدے متشابہ اور متشابہ الوضع منتظم کثیر الاضلاع ہیں جو احاطہ کرنے والے دو دائروں کے اندر بنائے گئے ہیں زیر بحث منحنی سطح اس ناقص مخروط مضلع کے طرفی رقبہ کی انتہا خیال کیجا سکتی ہے

شکل (۶۵)

یہ رقبہ منحرفوں کی ایک تعداد پر مشتمل ہے جن سب کا ارتفاع مشترک ہے یعنی انکے متوازی اضلاع کے درمیان عمودی فاصلہ۔ اس لئے یہ رقبہ اس مشترک ارتفاع اور ان دو کثیر الاضلاعوں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے انتہا میں یہ محیط حائط دائروں کے محیط بن جاتے ہیں اور یہ مشترک ارتفاع دائروں سے گھرے ہوئے مخروط کا مکون خط بن جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں خط مستقیم پ ق کے ایک ایسے محور کے گرد گھومنے سے جو اس کی مستوی میں واقع ہے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ پ ق اور پ اور ق کے مرتسمہ دائروں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اور یہ وہی بات ہے کہ یہ رقبہ پ ق اور اسکے وسطی نقطہ کے مرتسمہ دائرہ کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اسکے بعد وہ سطح لو جو منحنی $\quad$ ما = فما (۱) .... (۱)

کی قوس محور لا کے گرد گردش کرنے سے پیدا کرتی ہے۔ اس قوس میں نقطوں کی کوئی تعداد لو اور انکو سیدھے خطوں سے ملا کر ایک کھلا کثیر الاضلاع حاصل کرو منحنی سطح کی یہ تعریف اختیار کرلی جاتی ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے جو رقبے مرتسم ہوتے ہیں ان کے مجموعہ کی یہ انتہائی قیمت ہے جبکہ اضلاع کے طول کو لاانتہا کم کیا جائے۔ اس لئے اگر مکون منحنی کے کسی عنصر مف س کا وتر پ ق ہو اور پ ق کے وسطی نقطہ کا معین ما ہو تو منحنی سطح مجموعہ Σ ۲ π ما × پ ق کی انتہائی ۲۵۶ قیمت ہوگی۔ انتہا میں پ ق، مف س کے ساتھ نسبت مساوات رکھتا ہے اور ما کو منحنی کا معین خیال کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح سطح ۲ π Σ (ما × مف س) کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوئی یعنی سطح ہے

۲ π $\int$ ما فر س .... (۲)

جبکہ تکملہ کو س کی مناسب وسعت پر لیا گیا ہے۔

مثال ۱۔ کرہ کی صورت میں مکون منحنی کے کسی نقطہ کے محدد ہیں

لا = ا جم طہ، ما = ا جب طہ .... (۳)

جس سے $\frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}}$ = ا .... (۴)

پس منطقہ کی سطح جو محور لا پر عمود وار مستویوں سے گھرا ہوا ہو یہ ہوگی

۲ π ا^{۲} $\int_{\text{طہ}_{۲}}^{\text{طہ}_{۱}}$ جب طہ فر طہ = ۲ π ا^{۲} (جم طہ$_{۱}$ - جم طہ$_{۲}$) = ۲ π ا (لا$_{۱}$ - لا$_{۲}$) ...(۵)

جہاں لا$_{۱}$، لا$_{۲}$ احاطہ کرنیوالے دائروں سے متعلق ہیں۔ اس لئے کرہ کا منطقہ رقبہ میں اس حائط اسطوانہ کے متناظر منطقہ کے مساوی ہے جس کا محور احاطہ کرنے والے دائروں کے مستویوں پر عمود وار ہے۔ خاص صورت میں کرہ کی کل سطح = ۲ π ا × ۲ ا = ۴ π ا^{۲}

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نیم قطر ب ہے۔ اس کی سطح میں ایک خط مستقیم ہے جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ا ہے۔ دائرہ کو اس خط کے گرد پھرانے سے جو چھلہ حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

یہاں لا = ب جب طہ، ما = ا - ب جم طہ، $\frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}}$ = ب ...(۶)

پس ۲π ∫ ما فرس = ۲π ب ∫ (ا - ب جم طہ) فرطہ .... (۷)

شکل (۶۶)

طہ کے حدود ہیں ۔ اور ۲π اور سطح حاصل ہوتی ہے ۲π ب × ۲π ا جو ب قطر کے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا طول (۲π ا) ہو اور یہ طول اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہے جو مکون دائرہ کا مرکز مرتسم کرتا ہے۔

۲۵۷

مثال ۳۔ ناقص لا = ا جب فہ، ما = ب جم فہ کو محور اعظم کے گرد پھرانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

۲π ∫ ما فرس = ۲π ∫ ما (فرس / فرفہ) فرفہ

= ۲π ا ب ∫ √(ا - ز^۲ جب^۲ فہ) فر (جب فہ) .... (۹)

دفعہ ۱۱۱ کی رو سے ۔ اب رکھو ز جب فہ = جب طہ .... (۱۰)

پس تکملہ (۹) = (۲π ا ب / ز) ∫ جم^۲ طہ فرطہ = (π ا ب / ز) (طہ + جب طہ جم طہ)

.... (۱۱)

کل سطح دریافت کرنیکے لئے اسے فہ = ∓ π/۲ کے درمیان یا

طہ = ∓ جب⁻¹ ز کے درمیان لیا جائے۔ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{ز}}\left\{\text{جب}^{-1}\text{ز}+\text{ز}\sqrt{1-\text{ز}^2}\right\}$$

یا

$$2\pi\,\text{ب}^2+2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}\,\frac{\text{جب}^{-1}\text{ز}}{\text{ز}}\quad\ldots\ldots\ldots(12)$$

اسی طریقہ سے محور اصغر کے گرد ناقص کی گردش سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی سطح ہے

$$\frac{2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}}{\text{زَ}}\left\{\text{جبز}^{-1}\text{زَ}+\text{زَ}\sqrt{1+\text{زَ}^2}\right\}\ \text{جہاں}\ \text{زَ}=\frac{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}{\text{ب}}$$

یا

$$2\pi\,\text{ا}^2+2\pi\,\text{ا}\,\text{ب}\,\frac{\text{جبز}^{-1}\text{زَ}}{\text{زَ}}\quad\ldots\ldots\ldots(13)$$

اسے اس صورت میں بھی رکھا جا سکتا ہے

$$2\pi\,\text{ا}^2+\pi\,\text{ب}^2\times\frac{1}{\text{ز}}\ \text{لو}\ \frac{1+\text{ز}}{1-\text{ز}}\quad\ldots\ldots(14)$$

۱۴۱۔ تقریبی تکمل۔ ایک محدود تکملہ کی تقریبی قیمت دریافت کرنیکے کئی طریقے ایجاد کیے گئے ہیں جبکہ اس میں کے تفاعل کا نا محدود تکملہ نہ حاصل ہو سکے۔ اختصار بیان کی خاطر اس مسئلہ کی صرف ہندسی شکل پر غور کیا جائیگا یعنی اس رقبہ کی صرف تقریبی قیمت مطلوب ہے جو ایک دئے ہوئے منحنی، محور لا اور دو معلومہ معینوں کے درمیان واقع ہے۔

۲۵۸

جن طریقوں کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے ان سب میں دئے ہوئے حقیقی منحنی کی بجائے ایک اور منحنی رکھدینا مقصود ہوتا ہے جو قریب قریب وہی راستہ رکھتا ہو جو اصلی منحنی کا ہے لیکن یہ آسانی سے تکمل ہونے والے تفاعل سے تعبیر ہو سکے۔ سب سے آسان اور ناتراشیدہ طریقہ وہ ہے جس میں مساوی فاصلوں پر منحنی کے ن معین کھینچے جاتے ہیں اور ان کے سروں کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا جاتا ہے اس طرح منحرفوں کے ایک سلسلہ کا رقبہ مطلوبہ رقبہ کی جگہ اختیار کرلیتا ہے۔ اگر متصل معینوں کے درمیان فاصلہ ھ ہو اور معینوں کے طول ا_1، ا_2 .... $\text{ا}_{\text{ن}}$

ہوں تو منحرفوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{۱}{۲}(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲})\text{ھ}+\frac{۱}{۲}(\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳})\text{ھ}+\dots+\frac{۱}{۲}(\text{ما}_{\text{ن}-۲}+\text{ما}_{\text{ن}-۱})\text{ھ}+\frac{۱}{۲}(\text{ما}_{\text{ن}-۱}+\text{ما}_{\text{ن}})\text{ھ}$$

$$=\text{ھ}\left\{\frac{۱}{۲}\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳}+\dots+\text{ما}_{\text{ن}-۲}+\text{ما}_{\text{ن}-۱}+\frac{۱}{۲}\text{ما}_{\text{ن}}\right\}\dots\dots\dots(۱)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کے اوسط حسابی میں درمیانی معینوں کا مجموعہ جمع کرو اور نتیجہ کو مشترک وقفہ ھ سے ضرب دو۔

اس طرح سے جو قیمت حاصل ہوگی وہ صریحاً اصلی رقبہ سے زیادہ ہوگی اگر منحنی محور لا کی جانب محدب ہو اور کم ہوگی اگر مقعر ہو۔

شکل (۶۷)

ایک اور طریقہ جو ابتداً میں نیوٹن اور کوٹس* نے دیا وہ یہ ہے کہ ما کے لئے (ن-۱) ویں درجہ کا منطق تکملی عملاً اختیار کیا جائے یعنی

---

* دیکھو کوٹس کا رسالہ De Methodo Differentiali جو Harmonia Mensurarum, Camb. 1722 کے ضمیمہ کے طور پر چھپا۔

$$ما = ا_{.} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + \ldots\ldots + ا_{ن-۱} لا^{ن-۱} \ldots\ldots (۲)$$

۲۵۹

اور پھر سروں $ا_{.}$، $ا_{۱}$، $ا_{۲}$ ...... $ا_{ن-۱}$ کے لئے قیمتیں دریافت کی جائیں کہ لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے لئے ما کی معلومہ اور معینہ قیمتیں $ما_{۱}$، $ما_{۲}$ ... $ما_{ن}$ ہوں۔ تب رقبہ حاصل ہوتا ہے

$$\int ما\, فرلا = ا_{.} لا + \frac{۱}{۲} ا_{۱} لا^{۲} + \frac{۱}{۳} ا_{۲} لا^{۳} + \ldots + \frac{۱}{ن} ا_{ن-۱} لا^{ن} \ldots (۳)$$

جسے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔
مثلاً تین متساوی الفصل معینوں کی صورت میں مبدأ کو وسطی معین کے پایہ پر لو۔ ہم تسلیم کرتے ہیں

$$ما = ا_{.} + ا_{۱} \frac{لا}{ھ} + ا_{۲} \left(\frac{لا}{ھ}\right)^{۲} \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ترتیب وار ذیل کی شرائط کے تابع

$$\left| \begin{matrix} ما & = & ما_{۱} & ما_{۲} & ما_{۳} \\ لا & = & -ھ & . & ھ \end{matrix} \right. \ldots\ldots (۵)$$

اِن سے حاصل ہوتا ہے

$$ا_{.} - ا_{۱} + ا_{۲} = ما_{۱}،\ ا_{.} = ما_{۲}،\ ا_{.} + ا_{۱} + ا_{۲} = ما_{۳} \ldots (۶)$$

پس $ا_{.} = ما_{۲}$، $ا_{۱} = \frac{۱}{۲}(ما_{۳} - ما_{۱})$، $ا_{۲} = \frac{۱}{۲}(ما_{۱} + ما_{۳} - ۲ما_{۲}) \ldots (۷)$

اس لئے $\int_{-ھ}^{ھ} ما\, فرلا = ۲\left(ا_{.} + \frac{۱}{۳} ا_{۲}\right) ھ = \frac{۱}{۳}(ما_{۱} + ۴ما_{۲} + ما_{۳}) ھ \ldots (۸)$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۹ کے ساتھ۔
اوپر کا طریقہ اس کے مرادف ہے کہ حقیقی منحنی کی بجائے مکافی کی قوس رکھدی جائے جس کا محور انتصابی ہے۔ اور نتیجہ (۸) منحرف $\frac{۱}{۲}(ما_{۱} + ما_{۳})$ ۲ ھ اور مکافی قطعہ

$\frac{۲}{۳}\left\{\frac{۱}{۲}(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۳})-\text{ما}_{۲}\right\}۲\text{ھ}$ سے کے فرق کو تعبیر کرتا ہے۔

دیکھو دفعہ ۱۰۰ مثال ۳۔

چار متساوی الفصل معینوں کی صورت میں اسی طرح کے عمل سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳}{۸}(\text{ما}_{۱}+۳\text{ما}_{۲}+۳\text{ما}_{۳}+\text{ما}_{۴})\text{ھ} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

اور پانچ معینوں کی صورت میں ملتا ہے

$$\frac{۲}{۴۵}(۷\text{ما}_{۱}+۳۲\text{ما}_{۲}+۱۲\text{ما}_{۳}+۳۲\text{ما}_{۴}+۷\text{ما}_{۵})\text{ھ} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

۲۶۰ معینوں کی تعداد کے بڑھنے سے اس طریقہ میں سر زیادہ بے ڈول* ہوتے ہیں۔ سمپسن نے تقریبی رقبہ دریافت کرنیکا ایک سادہ طریقہ ایجاد کیا† مگر اس میں عام طور پر اتنی صحت نہیں ہوتی۔ وقفہ کو معینوں کی طاق تعداد میں تقسیم کرو۔ پہلے معین سے شروع کر کے متبادل معینوں کے درمیان کا رقبہ مکافی ضابطہ (۸) کے ذریعہ محسوب کرو اور ان نتائج کو جمع کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳}\{\text{ما}_{۱}+۴\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳}$$
$$+\text{ما}_{۳}+۴\text{ما}_{۴}+\text{ما}_{۵}$$
$$+\text{ما}_{۵}+۴\text{ما}_{۶}+\text{ما}_{۷}$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\text{ما}_{۲ن-۱}+۴\text{ما}_{۲ن}+\text{ما}_{۲ن+۱}\}\text{ھ}$$

$$=\frac{۱}{۳}\left\{(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲ن+۱})+۲(\text{ما}_{۳}+\text{ما}_{۵}+\ldots+\text{ما}_{۲ن-۱})+۴(\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۴}+\ldots+\text{ما}_{۲ن})\right\}\text{ھ} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

یعنی پہلے اور آخری معین کا مجموعہ، درمیانی طاق معینوں کے مجموعہ کا دو چند اور جفت معینوں کے مجموعہ کا چہار چند لیکر ان سب کو جمع کرو، اس کل مجموعہ کے ایک تہائی کو مشترک وقفہ ھ کے ساتھ ضرب دو۔

* صورتوں ن = ۳، ۴، ۵، ... ۱۱ کے لئے کوٹس نے سر دریافت کئے۔ نیز دیکھو Bertrand, Calcul Integral دفعہ ۳۶۳۔

† Mathematical Dissertations (1748)

مثال۔ ضابطہ $\frac{۱}{۴}\pi = \int_{ب}^{۱} \frac{فرلا}{۱+لا^۲}$ ....(۱۲)

سے π کی قیمت محسوب کرو۔

تکمل کی وسعت کو دس مساوی وقفوں میں تقسیم کرو، یعنی ھ = ۱ء تو

فا$_۱$ = ۱، فا$_۲$ = ۰ء۹۹۰۰۹۹۰، فا$_۳$ = ۰ء۹۶۱۵۳۸۵

فا$_۴$ = ۰ء۹۱۷۴۳۱۲، فا$_۵$ = ۰ء۸۶۲۰۶۹۰

فا$_۶$ = ۰ء۸۰۰۰۰۰۰، فا$_۷$ = ۰ء۷۳۵۲۹۴۱

فا$_۸$ = ۰ء۶۷۱۱۴۰۹، فا$_۹$ = ۰ء۶۰۹۷۵۶۱

فا$_{۱۱}$ = ۰ء۵، فا$_{۱۰}$ = ۰ء۵۵۲۴۸۶۲

اس لئے فا$_۱$ + فا$_{۱۱}$ = ۱ء۵، فا$_۳$ + فا$_۵$ + فا$_۷$ + فا$_۹$ = ۳ء۱۶۸۶۵۷۷

فا$_۲$ + فا$_۴$ + فا$_۶$ + فا$_۸$ + فا$_{۱۰}$ = ۳ء۹۳۱۱۵۷۳

ضابطہ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{۱}{۴}\pi = \frac{۱}{۳۰}$ (۱ء۵ + ۶ء۳۳۷۳۱۵۴ + ۱۵ء۷۲۴۶۲۹۲)

= ۰ء۷۸۵۳۹۸۱۵

۲۶۱

صرف سات ہندسے رکھنے سے π = ۳ء۱۴۱۵۹۳

یہ نتیجہ آخری ہندسہ تک درست ہے۔

ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا $\frac{\pi}{۴}$ = ۰ء۷۸۴۹۸۱۵۰

یعنی π = ۳ء۱۳۹۹۲۶ جو تقریباً ۰۰۲ء میں بقدر ایک حصہ کے چھوٹا ہے۔

۱۱۵۔ اوسط قیمتیں۔ فرض کرو کہ وسعت (ب - ا) کے اندر لا کی ن متساوی الفصل قیمتوں کے جواب میں ایک تفاعل فا(لا) کی قیمتیں فا$_۱$، فا$_۲$ ...... فا$_ن$ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ تفاعل کی یہ قیمتیں لا کی ان قیمتوں کے جواب میں ہیں جو ن مساوی وقفوں (ھ) کے وسطی نقاط کو تعبیر کرتے ہیں جن میں وسعت تقسیم کی گئی ہے۔ جس انتہائی قیمت کی طرف یہ اوسط حسابی

$$\frac{1}{\text{ن}}\left(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \dots\dots + \text{ما}_\text{ن}\right) \quad \dots\dots\dots (۱)$$

مائل ہوتی ہے جبکہ ن لا انتہا بڑھتا ہے اس کو تفاعل کی "اوسط قیمت" کہتے ہیں سعت (ب - ا) پر۔

چونکہ $\text{ھ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}$ ، جملہ (۱) اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ما}_1\,\text{ھ} + \text{ما}_2\,\text{ھ} + \dots\dots + \text{ما}_\text{ن}\,\text{ھ}}{\text{ب} - \text{ا}}$$

اور اسکی انتہائی قیمت جبکہ $\text{ن} \to \infty$ ، $\text{ھ} \to 0$ یہ ہے

$$\frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}(\text{لا})\, \text{ڈلا}}{\text{ب} - \text{ا}} \quad \dots\dots\dots\dots (۲)$$

ہندسی تعبیر کے موافق اوسط قیمت اُس مستطیل کا ارتفاع ہے جس کا قاعدہ ب - ا ہے اور جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہے جو منحنی $\text{ما} = \text{فا}(\text{لا})$ ، اطراف کے معینوں اور محور لا سے گھرا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۴۹ دفعہ ۹۱۔

دفعہ ۹۱ (۳) کا مسئلہ اب یوں بیان ہو سکتا ہے۔ متغیر متبوع کی کسی وسعت پر ایک مسلسل تفاعل کی اوسط قیمت ، اُسی سعت کے اندر متغیر متبوع کی ایک ایک قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۱۴ کے مختلف ضابطوں کی اب یہ تعبیر ہو سکتی ہے کہ ان سے ایک معلومہ سعت میں تفاعل کی اوسط قیمت کے لئے تقریبی جملے تفاعل کی ایسی قیمتوں کے سلسلہ کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں جو سعت بھر میں متساوی الفصل وقفوں پر لیگئی ہیں۔ مثلاً تین یا چار ایسی قیمتوں کی رقوم میں اوسط قیمتیں کوٹس کے طریقہ سے بالترتیب یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\frac{1}{6}\left(\text{ما}_1 + 4\,\text{ما}_2 + \text{ما}_3\right) ، \quad \frac{1}{8}\left(\text{ما}_1 + 3\,\text{ما}_2 + 3\,\text{ما}_3 + \text{ما}_4\right)$$

اوسط قیمت کے تخیل کو استعمال میں لانے سے پہلے یہ صاف طور پر معلوم ہونا ضروری ہے کہ تغیر متبوع کونسا ہے جسکو (ابتدا میں) مساوی اضافے دئے گئے ہیں مثلاً اگر ایک ذرہ مستقل اسراع ج کے ساتھ نیچے گر رہا ہو تو رفتار کی اوسط قیمت، سکون سے وقت کے کسی وقفہ ت، میں یہ ہے

$$\frac{1}{ت_1}\int_{0}^{ت_1} ع\ فت = \frac{1}{ت_1}\int_{0}^{ت_1} ج ت\ فت = \frac{1}{2} ج ت_1$$

یعنی یہ آخری رفتار کا آدھا ہے۔ لیکن اگر اوسط رفتار فضا (س) کے مساوی چھوٹے اضافوں کے لئے مطلوب ہو تو چونکہ $ع^2 = 2 ج س$

$$\frac{1}{س_1}\int_{0}^{س_1} ع\ فس = \frac{(2ج)^{\frac{1}{2}}}{س_1}\int_{0}^{س_1} س^{\frac{1}{2}}\ فس = \frac{2}{3}(2ج س_1)^{\frac{1}{2}}$$

یہ آخری رفتار کا دو تہائی ہے۔

مثال ۱۔ جب طہ کی اوسط قیمت، ۰ سے π تک طہ کے متساوی الفصل وقفوں کے لئے ہے

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} جب طہ\ فطہ = \frac{2}{\pi} = ۰٫۶۳۶۶ \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس لئے نصف قطر ا، کے نصف دائرہ کے معینوں کی اوسط قیمت، جبکہ انہیں قوس کے متساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچا جائے ۰٫۶۳۶۶ ا، ہے۔

اگر قطر ۲ا، پر کے متساوی الفصل نقطوں میں سے معین کھینچے جاتے تو اوسط قیمت ہوتی

$$\frac{1}{2ا_1}\int_{-ا_1}^{ا_1}\sqrt{ا_1^2 - لا^2}\ فلا = \frac{1}{2} ا_1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جم^2 طہ\ فطہ = \frac{1}{4}\pi ا_1 \ldots (4)$$

یا ۰٫۷۸۵۴ ا، ۔ یہ بآسانی از خود دیکھا جا سکتا ہے کہ اس آخری اوسط کو کیوں بڑا ہونا چاہیئے۔

مثال ۲۔ ایک ٹکیا کی شکل گردش کے مکافی نما کی ہے جو بہت چپٹا ہے۔ اس کی اوسط موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ دریافت کرو۔

اگر ا، نصف قطر ہو تو مرکز سے فاصلہ د پر موٹائی کی نسبت مرکز پر کی موٹائی کے ساتھ

ہے $\sqrt{1-\frac{ر^2}{ا^2}}$ ....(۵)

اس لئے مطلوبہ نسبت ہے

$\frac{1}{\pi ا^2}\int_0^{ا} ۲\pi ر فر \sqrt{1-\frac{ر^2}{ا^2}} = \frac{2}{3}$ ....(۶)

مثال ۳۔ اگر کرہ کی کثافت ث مرکز سے فاصلہ ر کا تفاعل ہو تو حجم کا جزو

$مف ح = مف(\frac{4}{3}\pi ر^3) = 4\pi ر^2 مف ر$

اوسط کثافت ہے $\overline{ث} = 4\pi\int_0^{ا} ث ر^2 فر \div \frac{4}{3}\pi ا^3$

$= \frac{3}{ا^3}\int_0^{ا} ث ر^2 فر$ ....(۷)

اگر ا بیرونی نصف قطر ہو۔

مثلاً اگر $ث \propto ر^ن$ تو اوسط کثافت سطح پر کی کثافت کا $\frac{3}{ن+3}$ ہے۔

نیز یہ تسلیم کرنے سے کہ زمین کے اندر

$ث = ث_0(1-ک\frac{ر^2}{ا^2})$ ....(۸)

حاصل ہوتا ہے

$\overline{ث} = ث_0(1-\frac{3}{5}ک) = \frac{1}{5}(2ث_0+3ث_1)$ ......(۹)

جہاں $ث_1$ سطح پر (ر = ا) کی کثافت ہے۔ اگر کثافت کا اوپر کا قانون زمین کی صورت میں لگ سکے، تب چونکہ $\overline{ث} = 2ث_1$ (تقریباً) ہمیں حاصل ہوتا ہے $ث_0 = \frac{7}{2}ث_1$ یا مرکز پر کی کثافت سطح پر کی کثافت کا $3\frac{1}{2}$ گنا ہے۔

۱۱۶۔ ہندسی اشکال کے اوسط مرکز۔

ہندسی نقاط

$(لا_1، ما_1)، (لا_2، ما_2)، (لا_3، ما_3) .... (لا_ن، ما_ن)$ ....(۱)

کے نظام کے اوسط مرکز (ط) کی یہ تعریف ہوسکتی ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس کے محدد ہیں

$$\left.\begin{aligned} \bar{لا} &= \frac{1}{ن}(لا_1 + لا_2 + \cdots\cdots + لا_ن) = \frac{\sum(لا)}{ن} \\ \bar{ما} &= \frac{1}{ن}(ما_1 + ما_2 + \cdots\cdots + ما_ن) = \frac{\sum(ما)}{ن} \end{aligned}\right\} \quad (۲)$$

چونکہ یہ ارتباط خطی ہیں اور کارٹیزی محددوں کے استحالے خطی ضابطوں سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس لئے یہ باسانی معلوم ہوتا ہے کہ کسی خط سے ط کا فاصلہ اسی خط سے دئے ہوئے نقطوں کے فاصلوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہے۔ البتہ اِن فاصلوں کو مناسب علامتوں کے ساتھ لیا جائے بموجب اِس کے کہ یہ خط کے ایک جانب واقع ہوں یا دوسری جانب۔

اِسی طریقہ سے، ایک مستوی منحنی کا یا مستوی رقبہ کا ایک اوسط مرکز ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس مستوی میں کے کسی خط سے منحنی یا رقبہ کے صغاری اجزاء کے فاصلوں کے اوسط (دفعہ ۱۱۵ کے معنے میں) کے مساوی ہوتا ہے۔

پس منحنی کے لئے

$$\bar{لا} = \text{نہا}\,\frac{\sum لا\,مف\,س}{\sum مف\,س}،\quad \bar{ما} = \text{نہا}\,\frac{\sum ما\,مف\,س}{\sum مف\,س} \quad \cdots (۳)$$

۲۶۴

اور رقبہ کی صورت میں

$$\bar{لا} = \text{نہا}\,\frac{\sum لا\,مف\,ق}{\sum مف\,ق}،\quad \bar{ما} = \text{نہا}\,\frac{\sum ما\,مف\,ق}{\sum مف\,ق} \quad \cdots\cdots (۴)$$

جہاں مف ق رقبہ کا جزو یا عنصر ہے۔ انتہا میں یہ مجموعے تکملوں کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

مثال ۱۔ دائرہ کی قوس کی صورت میں، اگر مبدا کو مرکز، محور لا کو وسطی خط پر لیا جائے تو $\bar{ما} = ۰$۔ ازروے تشاکل۔ لکھو لا = ا جم ط، مف س = ا مف ط، اس طرح

$$\bar{لا} = \frac{1}{۲\,ا\,عہ}\int_{-عہ}^{عہ} ا\,جم\,ط\,ا\,فِ\,ط = \frac{جب\,عہ}{عہ}\,ا \quad \cdots\cdots (۵)$$

اگر ۲ عہ وہ زاویہ ہو جو کل قوس کے سامنے مرکز پر بنتا ہے۔

جیسے عہ بڑھتا ہے لا متناہی چھوٹی قیمت سے۔ یہاں تک کہ لاَ گھٹتا ہے اسے صفر تک۔

نصف دائرہ کے لئے عہ = $\frac{\pi}{2}$ اور لاَ = $\frac{2}{\pi}$ ر = ۰٫۶۳۷ ر

مثال ۲۔ مکافی ھاَ = ۴ ا لا .... (۶)

کے قطعہ کے رقبہ کے لئے جو دوہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہو

$$\text{لاَ} = \frac{\int_{0}^{\text{ف}} \text{لا ھا فرلا}}{\int_{0}^{\text{ف}} \text{ھا فرلا}} = \frac{\int_{0}^{\text{ف}} \text{لا}^{\frac{3}{2}} \text{فرلا}}{\int_{0}^{\text{ف}} \text{لا}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}} = \frac{3}{5} \text{ ف} \quad \text{......} (7)$$

اوسط مرکز کے تخیل کی صراحت تین ابعادی شکلوں کی صورت میں بھی توسیع کی جا سکتی ہے، لیکن یہاں خط سے فاصلوں کی بجائے سطح مستوی سے فاصلے لئے جانے چاہئیں۔ مثلاً سطح منحنی کی صورت میں

$$\text{لاَ} = \text{نہا} \frac{\sum \text{لا مف س}}{\sum \text{مف س}}،\ \text{ھاَ} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ھا مف س}}{\sum \text{مف س}}،\ \text{یَ} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ی مف س}}{\sum \text{مف س}} \quad \text{.......} (8)$$

جہاں مف س سطح کا جزو ہے۔ اسی طرح حجم کے لئے

$$\text{لاَ} = \text{نہا} \frac{\sum \text{لا مف ح}}{\sum \text{مف ح}}،\ \text{ھاَ} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ھا مف ح}}{\sum \text{مف ح}}،\ \text{ی} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ی مف ح}}{\sum \text{مف ح}} \quad \text{.........} (9)$$

جہاں مف ح حجم کا جزو ہے۔

گردشی سطح یا مجسم کی صورت میں اوسط مرکز تشاکل کے محور پر ہوتا ہے، اگر اس کو محور لا مانا جائے تو صرف لاَ کی قیمت محسوب کرنا باقی رہ جاتا ہے۔ اگر مکون منحنی کا معین ھا ہو تو (۸) میں رکھو مف س = ۲ π ھا مف س یہ سطح کے حلقہ نما جزو کا رقبہ ہوگا جس کے سب نقطے مستوی لا سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ اس لئے

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\int \text{لا} \times 2\pi\, \text{ما فرس}}{\int 2\pi\, \text{ما فرس}} = \frac{\int \text{لا ما فرس}}{\int \text{ما فرس}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اسی طرح (۹) میں رکھو مف ح = π ما^2 مف لا تو حاصل ہوگا

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\int \text{لا} \times \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}}{\int \pi\, \text{ما}^2\, \text{فرلا}} = \frac{\int \text{لا ما}^2\, \text{فرلا}}{\int \text{ما}^2\, \text{فرلا}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

مثال ۳ ـ کروی سطح کے منطقہ کے لئے رکھو

$$\text{لا} = \text{ا جم طہ}،\ \text{ما} = \text{ا جب طہ}،\ \text{مف س} = \text{ا مف طہ} \quad \ldots (۱۲)$$

$$\text{تو}\ \overline{\text{لا}} = \text{ا}\, \frac{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{جم طہ جب طہ فرطہ}}{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{جب طہ فرطہ}} = \frac{1}{2}\, \text{ا}\, \frac{\text{جم}^2\, \text{عہ} - \text{جم}^2\, \text{بہ}}{\text{جم عہ} - \text{جم بہ}}$$

$$= \frac{1}{2}\, \text{ا} (\text{جم عہ} + \text{جم بہ}) = \frac{1}{2} (\text{لا}_1 + \text{لا}_2) \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

اگر عہ، بہ زاویہ طہ کے حدود ہوں اور لا_1، لا_2 حائط دائروں کے فصلے ہوں۔ لہٰذا
اس لئے منطقہ کا اوسط مرکز محور پر حائط دائروں کے مستویوں کے عین وسط میں واقع ہوتا ہے
مثلاً نیم کروی سطح کا اوسط مرکز محوری نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔
یہ نتائج کرہ اور لفافی اسطوانہ کے متناظر منطقوں کے رقبوں کے مساوی ہونے سے حاصل ہوسکتے تھے (دفعہ ۱۱۳ مثال ۱)۔

مثال ۴ ـ مجسم مستدیر مخروط کی صورت میں جبکہ مبدأ راس پر ہو تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا^2، پس

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^3\, \text{فرلا}}{\int_0^{\text{ف}} \text{لا}^2\, \text{فرلا}} = \frac{3}{4}\, \text{ف} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اگر ف ارتفاع ہو۔

مثال ۵ ـ ناقصی مکافی نما

$$۲\,\text{لا} = \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{پ}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ق}} \quad \cdots\cdots (۱۵)$$

کے قطعہ کے لئے جو لا = ف سے کٹتا ہے چونکہ تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا،
اس لئے جیساکہ دفعہ ۱۰۸ مثال ۱ میں

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\int_{۰}^{\text{ف}} \text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\int_{۰}^{\text{ف}} \text{لا}\,\text{فرلا}} = \frac{۲}{۳}\,\text{ف} \quad \cdots\cdots (۱۶)$$

۲۶۶ مثال ۶ ۔ نصف قطر ا کے نصف کرہ کے لئے رکھو $\text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}$ اسطرح

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\int_{۰}^{\text{ا}} \text{لا}\,(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}}{\int_{۰}^{\text{ا}} (\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}} = \frac{۳}{۸}\,\text{ا} \quad \cdots\cdots (۱۷)$$

اسی ضابطہ سے ناقص نما

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱ \quad \cdots\cdots (۱۸)$$

کے اُس نصف کے اوسط مرکز کا مقام معلوم ہوتا ہے جو مستوی ما ی کے دائیں جانب واقع ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا) ایسے بدلتا ہے جیسے $\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}$۔ دیکھو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ ۔

۱۱۷ ۔ پیپس (Pappus.) کے مسئلے ۔

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد گھومے مگر اسکو کاٹے نہیں تو سطح جو اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ قوس کے طول اور اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ محور لا گھماؤ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اور کون منحنی کا معین ما ہے۔ دفعہ ۱۱۳ کی رو سے پوری گردش میں جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ $۲\pi \int \text{ما}\,\text{فرس}$ کے مساوی ہے جہاں تکملہ کل قوس پر لیا جائے ۔

اگر قوس کا اوسط مرکز $\bar{\text{ما}}$ ہو تو $\bar{\text{ما}} = \dfrac{\int \text{ما فرس}}{\int \text{فرس}}$ دفعہ ۱۱۶ کی رو سے ۔

اس لئے $\text{۲}\pi \int \text{ما فرس} = \text{۲}\pi\, \bar{\text{ما}} \times \int \text{فرس}$ ......(۱)

جو مسئلہ مذکورہ ہے ۔

(۲) اگر ایک مستوی رقبہ کو اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد پھرایا جائے جو اسے کاٹے نہیں تو حجم جو اس طرح پیدا ہوتا ہے وہ رقبہ اور اسکے اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ۔

فرض کرو کہ مف ق رقبہ کا عنصر ہے ۔ پوری گردش میں جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے

$$\text{نہا} \sum (\text{۲}\pi\, \text{ما} \times \text{مف ق})$$

اگر رقبہ کی کمیت کا مرکز $\bar{\text{ما}}$ ہو تو

$$\bar{\text{ما}} = \text{نہا} \frac{\sum \text{ما مف ق}}{\sum \text{مف ق}} \text{، دفعہ ۱۱۶ کی رو سے}$$

اسلئے $\text{نہا} \sum (\text{۲}\pi\, \text{ما} \times \text{مف ق}) = \text{۲}\pi\, \bar{\text{ما}} \times \text{نہا} \sum \text{مف ق}$ ....(۲) ۲۶۷

جو مسئلہ مطلوبہ ہے*۔

گردشوں کو پورا خیال کیا گیا ہے لیکن صریحاً یہ قید ضروری نہیں ۔

ان مسائل کے عکس مستوی قوس، مستوی رقبہ کے اوسط مرکز دریافت کرنیکے لئے استعمال ہو سکتے ہیں جبکہ ان کی گردش سے پیدا شدہ سطح اور حجم بلا واسطہ طریقہ پر معلوم ہوں ۔ دیکھو مثال ۲۳ آگے ۔

---

* یہ مسائل پیپس کے رسالہ علم حیل میں موجود ہیں ۔ پیپس ۳۰۰ء میں مشہور ریاضی داں تھا ۔ نئے سرے سے گلڈن (Guildinus) ان مسائل کو بیان کیا ۔ دیکھو

(De centro gravitatis (1635—1642).

(Ball, History of Mathematics)

مثال ۱۔ دائرہ نصف قطر ب، اپنی سطح میں کے ایک خط کے گرد گھوم کر چھلا پیدا کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا فاصلہ خط سے ا ہے۔ سطح اور حجم دریافت کرو۔

سطح ہے ۲ π ب × ۲ π ا = ۴ π^2 ا ب

حجم ہے π $ب^2$ × ۲ π ا = ۲ π^2 ا $ب^2$۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ مثال ۳ اور دفعہ ۱۱۲ مثال ۲ کے ساتھ۔

مثال ۲۔ مکافی $ها^2$ = ۴ ر لا کا قطعہ جو دوہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہے اس معین کے گرد گھومتا ہے۔

اگر دوہرے معین کا طول ۲ ک ہو تو قطعہ کا رقبہ $\frac{4}{3}$ ف ک ہے (دفعہ ۱۰۱) اور اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ معین سے $\frac{2}{5}$ ف ہے (دفعہ ۱۱۲ مثال ۲) اس لئے حجم جو پوری گردش سے پیدا ہوتا ہے یہ ہے

$$\frac{4}{3} \text{ ف ک} \times \frac{4}{5} \pi \text{ ف} = \frac{16}{15} \pi \text{ ف}^2 \text{ ک}$$

مثال ۳۔ نیم دائری قوس جو اس کے سروں کے ملانیوالے قطر کے گرد گھومتی ہے اسکے لئے

π ر × ۲ π ها = ۴ π $ر^2$، جس سے ها = $\frac{2}{\pi}$ ر

نیم دائری رقبہ جو اپنے احاطہ کرنے والے قطر کے گرد گھومتا ہے اسکی صورت میں

$\frac{1}{2}$ π $ر^2$ × ۲ π ها = $\frac{4}{3}$ π $ر^3$ یعنی ها = $\frac{4}{3}$ $\frac{ر}{\pi}$

اسی طرح کے حساب سے (کسی عمودی تراش کے) منشور یا اسطوانہ کے حجم کے لئے جو مستوی سروں سے گھرا ہوا ہو سادہ ضابطہ مل سکتا ہے۔

پہلے ہم یہ فرض کرینگے کہ ایک سرا جسے قاعدہ کہا جائیگا طول پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ قاعدہ کا کوئی نقطہ پ ہے اور فرض کرو کہ معین پ پَ کا طول ی ہے جہاں پ پَ طول کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مقابل کے سرے سے پَ پر ملتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مائل سرے کے مرکز کا معین یَ ہے۔ ۲۶۸

اگر پ اور پَ پر رقبہ کے متناظر اجزا مف ق اور مف قَ ہوں تو

$$\bar{ی} = \text{نہا} \frac{\sum ی \text{ مف ق}}{\sum \text{مف ق}} = \text{نہا} \frac{\sum ی \text{ مف } \bar{ق}}{\sum \text{مف ق}}$$

کیونکہ مف ق، مف قَ کا قائم ظل ہے، اس لئے انکی باہمی نسبت مستقل ہے۔

اسلئے مجسم کا حجم $= \sum (ی \times \text{مف ق}) = \bar{ی} \sum \text{مف ق}$ ...(۳)

یعنی حجم قاعدہ کے رقبہ اور مقابل کے رقبہ کے اوسط مرکز کے معین کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

جس منشور یا اسطوانہ کے دونوں سرے مائل ہوں اس کو دو ایسے منشوروں یا اسطوانوں کا مجموعہ یا فرق تصور کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک سرا طول کے علی القوائم ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام صورتوں میں حجم، چلیپی تراش اور دو سروں کے اوسط مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ فانہ کی شکل کے مجسم کا حجم جو ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے قاعدہ کے مرکز میں سے گذرنے والے مستوی سے کاٹا جائے اور قاعدہ کی سطح کے ساتھ زاویہ عما بنائے یہ ہے

$\frac{1}{2} \pi ا^2 \times \frac{4}{3\pi} ا$ مس عما $= \frac{2}{3} ا^3$ مس عما مقابلہ کرو دفعہ ۱۱۸ مثال ا کے ساتھ۔

پیپس کے مسئلوں کی کئی طرح سے تعمیم ہو سکتی ہے لیکن دوسرے مسئلہ کی حسب ذیل توسیع کا یہاں کر دینا کافی ہوگا۔

اگر کوئی مستوی رقبہ، جو مستقل ہو یا مسلسل طور پر بدلنے والا، فضا میں کسی طور پر حرکت کرے لیکن اس طرح کہ مستوی کے متصل محل ایک دوسرے کو رقبہ کے اندر نہ قطع کریں تو حجم تکوین شدہ مساوی ہے

$\int$ س فر شہ ....(۴)

کے جہاں س رقبہ ہے اور فر شہ ظل ہے مستوی پر کے عماد پر، رقبہ کے اوسط مرکز کے طریق (لوکس) کے چھوٹے جزو کا۔ اگر اس طریق کا جزو فر س ہو اور فر س

اور مستوی کے عماد کے درمیان زاویہ طہ ہو تو یہ ضابطہ یوں لکھا جا سکتا ہے

∫ س جم طہ فرس .... (۵)

یہ مسئلہ تین ابعادی جواب ہے مسئلہ دفعہ ۱۰۳ کا جو اس امر سے تعلق ہے کہ ایک متحرک خط اپنی حرکت میں کتنا رقبہ عبور کرتا ہے۔ مسئلہ زیر بحث اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔

۱۱۸۔ ضعفی تکملے۔

۲۶۹ اس کتاب کی بحث زیادہ تر ایک متغیر کے تفاعلوں تک محدود ہے اور اس لئے جہاں تک تکملی احصا کا تعلق ہے یہ ایسے مسائل پر بحث کرتی ہے جو ایک تکمل پر منحصر ہیں یا ایک تکمل پر لا کے منحصر کئے جا سکتے ہیں۔ لیکن ضعفی تکملے مضمون کے طبعی استعمال میں ترقیم وغیرہ کے طور پر اس کثرت سے استعمال ہوتے ہیں کہ ان کے متعلق چند تشریحات کا یہاں دیدینا سود مند ہوگا۔ نظری امور پر صرف سرسری توجہ کی جائے گی۔ باضابطہ بحث کے لئے دفعہ ۹۰ کے طریقہ کی مناسب ترمیم کیجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ی، متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے

ی = فہ (لا، ما) .... (۱)

اسکی ہندسی تعبیر یہ ہو سکتی ہے کہ یہ ایک سطح کی مساوات ہے (دفعہ ۳۴)۔ حوالہ کے مستوی لا ما میں کوئی محدود طبقہ س لو اور فرض کرو کہ ایک اسطوانی سطح ایک خط مستقیم کے ذریعہ پیدا کیجاتی ہے جو ہمیشہ س کے محیط سے ملتا ہے اور ی کے محور متوازی رہتا ہے۔ اس حجم ح پر غور کرو جو اس اسطوانہ، مستوی لا ما اور سطح (۱) کے درمیان گھرا ہے۔ دیکھو شکل ۶۸ صفحہ ۳۶۹۔

اگر طبقہ س کو رقبہ کے اجزا مف ق، مف ق۲، مف ق۳ ...... میں تقسیم کیا جائے اور ان اجزا کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے کھینچے ہوئے سطح (۱) کے معین ی، ی۲، ی۳ ...... ہوں تو محوروں کو علی القوائم فرض کر کے مجموعہ ی مف ق + ی۲ مف ق۲ + ی۳ مف ق۳ + ... (۲)

۲۷۰ ...... ی، ی، ی سے منشوروں کے ایک نظام کا کل حجم ملیگا جن کے ارتفاع
ہیں اور جو قاعدوں مف ق، مف ق، ... مف ق پر قائم ہیں۔

شکل (۶۸)

اور اگر تفاعل فہ (لا، ما) بعض شرائط کو پورا کرے جو عام طور پر تفاعل پورا کرتے ہیں* تو اوپر کا مجموعہ، جبکہ مف ق، مف ق، مف ق ...... کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے ایک یگانہ انتہائی قیمت کی طرف مستدق ہوگا۔ یہ انتہا حجم ح ہے۔
اگر طبقہ س کے چھوٹے حصے محاور لا اور ما کے متوازی ہوں تو اجزا
مف ق، مف ق، ...... نمونہ مف لا مف ما
کے مستطیلی رقبے ہونگے اور مجموعہ (۲)

ح ح ی مف لا مف ما .... (۳)

---

* تسلسل کی شرط جس کا پہلے سے ذکر کیا گیا ہے وہ کافی ہے لیکن ثبوت میں سہولت پیدا ہوگی اگر یہ زائد شرط شریک کردیجائے کہ مستوی لا ما کے کسی محدود رقبہ کے اندر فہ (لا، ما) کی اعظم اور اقل قیمتیں تعداد میں محدود ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۰۔

سے تعبیر ہو سکیگا جہاں ح دوبارآتا ہے کیونکہ مجموعہ دو ابعاد میں لیا جاتا ہے۔ اس مجموعہ کی انتہائی قیمت ذیل کی علامت سے تعبیر ہوگی۔

∫∫ی فرلا فرما ...... (۴) [∫∫ Zdxdy]

اور حجم کے لئے ضابطہ ہوگا ح = ∫∫ فما (لا، ما) فرلا فرما .... (۵)

بائیں جانب کا جملہ "دوہرا تکملہ" کہلاتا ہے۔ اسکی قیمت کی تعیین نہیں ہو سکتی جب تک کہ متغیروں لا، ما کی وسعت جسکی سں کے محیط سے حدبندی ہوتی ہے معین نہ ہو سکے۔

حجم ح ایک اور طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر ف (لا) سطح کی ایک تراش کا رقبہ ہو جو ما ی کے متوازی ایک مستوی سے کٹی ہے جس کا فصلہ لا ہے تو دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

ح = $\int_{ا}^{ب}$ ف (لا) فرلا .... (۶)

جہاں رقبہ سں سے متعلق لا کے حدود ا، ب ہیں۔ لیکن دفعہ ۱۰۰ کی رو سے

ف (لا) = $\int_{عما}^{بما}$ ی فرما .... (۷)

جہاں عما، بما تراش ف (لا) میں ما کے حدود ہیں جو بالعموم لا کے تفاعل ہونگے۔ اس لئے

ح = $\int_{ا}^{ب}$ { $\int_{عما}^{بما}$ فما (لا، ما) فرما } فرلا .... (۸)

یا جیسے اسکو بالعموم لکھا جاتا ہے۔

ح = $\int_{ا}^{ب}\int_{عما}^{بما}$ فما (لا، ما) فرلا فرما ... (۹)+ [∫∫ f (x,y) dxdy]

+ پہلا تکملہ فرلا سے متعلق ہے اور دوسرا فرما سے۔ اس امر کے متعلق کوئی پورے طور پر یکساں قرارداد نہیں ہے۔

۲۷۱

اگر دونوں تکملوں کے حدود مستقل ہوں یعنی اگر طبقہ س ایک مستطیل کی شکل کا ہو جس کے اضلاع محاور لا اور ما کے متوازی ہیں تو حجم اس طور پر بھی بیان ہو سکیگا

$$\int \left\{ \int فہ (لا ، ما) فرلا \right\} فرما \quad .... (۱۰)$$

اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ

$$\int\int فہ (لا ، ما) فرلا فرما = \int\int فہ (لا ، ما) فرما فرلا \quad .....(۱۱)$$

اس کی توضیح شکل ۲۳ دفعہ ۴۳ سے ہوتی ہے۔ اور صورتوں میں جب تکمل کی ترتیب کو بدلا جائے تو مختلف تکملوں کے حدود کی ترمیم ضروری ہوتی ہے۔

اوپر کی تشریح ہندسی شکل میں ہے لیکن نفس مضمون کے لئے یہ ضروری نہیں۔ مثلاً ایک مستوی پترے کی کمیت نکالنے میں جس کے کسی ایک نقطہ (لا ، ما) پر کثافت معلوم ہو، تیز گئی اور طبیعی سوالات میں، یہی اصول شامل ہوتے ہیں۔

رقبہ س کی تحلیل کے لئے ایک اور طریقہ سودمند ہوتا ہے۔ مستوی لا ما میں قطبی محدد (ر ، طہ) لو۔ رقبہ س کو مستطیل نما اجزا میں ہم مرکز دائروں اور نیم قطروں کے ذریعہ تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے کسی ایک جزو کا رقبہ ر مف طہ مف ر ہے اگر ر دو منحنی اضلاع کے نیم قطروں کا اوسط حسابی ہو۔ ضابطہ (۸) اس طرح یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$ح = \int\int ی ر فر طہ فر \quad .... (۱۲) \quad \left[\int\int Zr\, d\theta dr \right]$$

جہاں ی ایک دیا ہوا تفاعل ہے ر اور طہ کا۔

جو اوپر بیان ہوا اسکے بعد تہرے تکمل

$$\int\int\int فہ (لا ، ما ، ی) فرلا فرما فری \quad .... (۱۳)$$

کے مفہوم کو زیادہ پختہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ ایک محدود خلا کے حصہ م کو محوروں کے

متوازی مستوی کھینچنے سے قائم عناصر مف لا مف ما مف ی میں تقسیم کرو۔ اگر ان عنصروں میں سے ہر ایک کے حجم کو ان میں کے کسی اختیاری طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ پر جو تفاعل فہ (لا، ما، ی) کی قیمت ہے اس کے ساتھ ضرب دیا جائے تو جملہ (۱۳) سے ایسے حاصل ضربوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت (بعض شرائط کے تابع) تعبیر ہوگی جبکہ ان عنصروں کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے یہی انتہائی قیمت تین سادہ تکملوں کے تواتر سے حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$\int_{\text{ل}}^{\text{م}}\left\{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}}\left(\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا، ما، ی})\ \text{فری}\right)\text{فرما}\right\}\text{فرلا} \quad\ldots\ldots(۱۴)$$

جہاں تکمل بلحاظ ی کے حدود ا اور ب کے اندر ہے جو عام طور پر لا، ما کے تفاعل ہیں پھر تکمل بلحاظ ما کے حدود عہ، بہ کے درمیان ہے جو بالعموم لا کے تفاعل ہیں اور آخیر میں تکمل بلحاظ لا کے ہے حدود ل، م کے اندر۔ ۲۷۲

اگر تکمل کے حدود سب مستقل ہوں تو تکمل کی ترتیب کے بدلنے سے یہ حدود نہیں بدلتے۔

مثال کے طور پر ایک مجسم کی کمیت معلوم کرنے کے سوال پر غور کرو جہاں کثافت لا، ما، ی کا تفاعل ہے۔

مثال ۱۔ اُس خانہ کا حجم دریافت کرو جو گھرا ہوا ہے مستوی ی = ۰، اسطوانہ

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲} \quad\ldots\ldots(۱۵)$$

اور مستوی ی = لا سس عہ کے اس حصہ کے درمیان جس کے لئے ی مثبت ہے۔

$$\iint \text{ی فرلا فرما} = \text{سس عہ}\int_{\text{ب}}^{\text{ا}}\int_{-\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}}^{\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}}\text{لا فرلا فرما} \quad\ldots\ldots(۱۶)$$

بلحاظ ما کے تکمل سے حاصل ہوتا ہے $\Big[\text{لا ما}\Big]_{-\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}}^{\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}} = ۲\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}$

تب $\int_{0}^{\text{ا}} ۲\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}\;\text{فرلا} = \left[-\frac{۲}{۳}\left(\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{0}^{\text{ا}} = \frac{۲}{۳}\,\text{ا}^{۳}$

مطلوبہ حجم اس لئے یہ ہے $\frac{۲}{۳}\,\text{ا}^{۳}\;\text{مس}\;\text{عا}$ . . . . (۱۷)

مثال ۲ - حجم جو کرہ $\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}+\text{ی}^{۲}=\text{ا}^{۲}$ . . . . (۱۸)

اور اسطوانہ $\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}=\text{ا}\,\text{لا}$ . . . . (۱۹)

کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔

(اسطوانہ کا نیم قطر کرہ کے نیم قطر سے آدھا ہے اور اس کا محور کرہ کے ایک نصف قطر کی علی القوایم تنصیف کرتا ہے)۔

اگر مستوی لا ما میں قطبی محدد شامل کئے جائیں تو مساوات (۱۹) یہ شکل اختیار کرتی ہے $\text{ر} = \text{ا}\;\text{جم}\;\text{طا}$ . . . . (۲۰)

اور (۱۸) سے حاصل ہوتا ہے $\text{ی} = \pm\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{ر}^{۲}}$ . . . . (۲۱)

مطلوبہ حجم اس لئے ہے

$$۲\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{0}^{\text{ا جم طا}} \text{ی}\,\text{ر}\;\text{فرطا}\;\text{فرر} = ۴\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{0}^{\text{ا جم طا}} \sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{ر}^{۲}}\;\text{ر}\;\text{فرطا}\;\text{فرر}$$ . . . . (۲۲)

اب $\int_{0}^{\text{ا جم طا}} \sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{ر}^{۲}}\;\text{ر}\;\text{فرر} = \left[-\frac{۱}{۳}\left(\text{ا}^{۲}-\text{ر}^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{0}^{\text{ا جم طا}}$

$= \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}\left(۱-\text{جب}^{۳}\,\text{طا}\right)$

اور $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}\left(۱-\text{جب}^{۳}\,\text{طا}\right)\text{فرطا} = \frac{\pi}{۲}-\frac{۲}{۳}$

بالآخر نتیجہ ہے $\frac{۲}{۳}\pi\,\text{ا}^{۳}-\frac{۸}{۹}\,\text{ا}^{۳}$ . . . . (۲۳)

امثلہ ۳۶*

۱۔ اگر ایک منحنی ایسا ہو کہ ما^م ∝ لا^ن تو ثابت کرو کہ جو مستطیل محوروں سے اور منحنی کے کسی نقطہ میں سے محدودوں کے متوازی خط کھینچنے سے بنتا ہے منحنی اسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جنکے رقبے نسبت م : ن میں ہوتے ہیں۔

۲۔ محور لا اور منحنی ما = ب جب لا/ا کی نیم موج کی درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ا ب ہے۔

۳۔ زنجیرہ ما = ج جمز لا/ج، محور لا، اور خطوط لا = ۰، لا = لا۱ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ج^۲ جبز لا۱/ج ہے۔

۴۔ منحنی ا^۲ ما = لا^۲ (لا + ا)، محور لا کی ساتھ ملکے ا^۲/۱۲ رقبہ گھیرتا ہے۔

۵۔ محور لا اور منحنی ما = قو^{-ع لا} جب ب لا کے متواز نیم موجوں کے درمیان جو رقبے ہیں ثابت کرو کہ وہ تنزولی ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک قو^{-ع π/ب} ہے۔

۶۔ محور لا اور مکافی ج ما = (لا - ا)(لا - ب) کے درمیان رقبہ ۱/۶ (ا - ب)^۳/ج ہے

۷۔ منحنیوں ۲ ما^۲ - ۳ ما = لا - ۱، ما^۲ - ۲ ما = لا - ۳ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ [۹/۴]

۸۔ مکافیوں ما = ۳ لا^۲ - لا - ۳، ما = - ۲ لا^۲ + ۴ لا + ۷ کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔ [۴۵/۲]

---

* مشق کے لئے اور مثالیں "خاص منحنیات" کے نویں باب کے ختم پر ملینگی۔

۹۔ مکافی $ما = لا^{۲} - ۷لا + ۹$ کا قطعہ جو خط مستقیم $ما = ۳ - ۲لا$ سے کٹتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ $[\frac{۱}{۶}]$

۱۰۔ مکافیوں $ما^{۲} = ۴ا(لا + ا)$، $ما^{۲} = ۴ب(ب - لا)$ کے درمیان کا رقبہ $\frac{۸}{۳}(ا + ب)\sqrt{اب}$ ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کل رقبہ (جبکہ یہ محدود ہو) جو محور لا اور منحنی $ما = \frac{۱}{عما} فما(\frac{لا}{عما})$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ عما کی قیمت پر منحصر نہیں۔ ۲۷۴

۱۲۔ منحنی $ما = ب$ مسر $\frac{لا}{ا}$ کی مثبت شاخ، اسکے متقارب اور محور ما کے درمیان کا رقبہ ا ب لوگ ۲ ہے۔ [دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۵]

۱۳۔ دو ناقصوں $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$، $\frac{لا^{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ا^{۲}} = ۱$ کا مشترک رقبہ $۴اب$ سر$^{-۱}\frac{ب}{ا}$ ہے۔

۱۴۔ رقبہ جو محددوں کے محوروں اور مکافی $(\frac{لا}{ا})^{\frac{۱}{۲}} + (\frac{ما}{ب})^{\frac{۱}{۲}} = ۱$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۱}{۶}$ ا ب جیب سہ ہے جہاں محوروں کے درمیان کا زاویہ سہ ہے [رکھو $لا = ا جب^{۴} طہ$، $ما = ب جم^{۴} طہ$]

۱۵۔ مکافی $۲ج ما = لا^{۲} + ا^{۲}$ اور اس کے دو مماسوں کے درمیان جو مبدأ سے کھینچے جائیں رقبہ $\frac{۱}{۳}\frac{ا^{۳}}{ج}$ ہے۔

۱۶۔ مکافیوں $ما^{۲} = ۴ا لا$، $لا^{۲} = ۴ا ما$ کا مشترک رقبہ $\frac{۱۶}{۳}ا^{۲}$ ہے۔

۱۷۔ تکمل سے ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ ہے π عما بما جیب سہ جہاں عما، بما مزدوج نیم قطروں کے کسی جوڑے کے طول ہیں اور سہ ان کے درمیان زاویہ ہے۔

۱۸۔ تکمل بالحصص کا ضابطہ [دفعہ ۸۰ (۲)] اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$\int ع ذو = ع و - \int و ذع$$

ہندسی طور پر رقبوں کی رقوم میں اسکی تعبیر بیان کرو۔

۱۹۔ باریک پترے پر ایک منحنی ا ب بنایا گیا ہے اور پترا اپنی سطح میں ثابت نقطہ و کے گرد زاویہ طھ میں سے گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{2}(\text{وا}^2 - \text{وب}^2)\,\text{طھ}$$

۲۰۔ منحنی ر = ۳ + ۲ جم طھ کو مرتسم کرو اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔ (۱۱ π)

۲۱۔ منحنی ر = ۲ ا (۱ + جم طھ) کے اُس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو مکافی $ر = \frac{۲ ا}{۱ + \text{جم طھ}}$ کے باہر واقع ہوتا ہے۔ [$۳ \pi ا^2 + \frac{۱۶}{۳} ا^2$]

۲۲۔ قطبی محدودں میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص

$ا\,لا^2 + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^2 = ۱$ کا رقبہ $\frac{\pi}{\sqrt{اب - ھ^2}}$ ہے۔

۲۳۔ ایک بے وزن رسی کا طول ل ہے، یہ ایک ثابت نقطہ و سے بندھی ہے اور ایک چھوٹے چھلے میں سے گذرتی ہے جو (چھلہ) ایک افقی سلاخ ا ب پر پھسل سکتا ہے۔ سلاخ، و میں کی انتصابی سطح میں واقع ہے۔ رسی کا نچلا حصہ انتصاباً نیچے لٹکتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک چھوٹا وزن پ بندھا ہے۔ پ کا طریق دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس طریق اور ا ب کے درمیان رقبہ $ل\sqrt{ل^2 - گ^2} - گ^2\,\text{جم}^{-1}\frac{ل}{گ}$ ہے جہاں گ گہرائی ہے ا ب کی نقطہ و سے۔

۲۴۔ ہندسی تخیلات کی بنا پر ثابت کرو کہ مکافی کے دو ماسکی نیم قطروں اور منحنی کے درمیان رقبہ اُس رقبہ کا نصف ہے جو منحنی مرتب پر کے متناظر عمودوں اور مرتب کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

۲۵۔ (شکل ۵۹) بتاؤ کہ ایمسلر کے سطح پیما میں پہیہ کے درجوں سے کیا ظاہر

ہوگا جبکہ سلاخ پ ق ایک پورا چکر لگاتی ہے اور نقطہ ق ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے۔

۲۶۔ ایک سطح پیما ایسی شکل کا ہے کہ اس کے جس بازو کے ساتھ مرتسم نقطہ لگا ہوا ہے اس کا دوسرا سرا ایک انتصابی محور پر چول کی صورت میں لگا ہوا ہے۔ انتصابی محور کو ایک چھوٹی گاڑی اٹھائے پھرتی ہے جو کاغذ پر (بغیر پھسلنے کے) آگے پیچھے لڑک سکتی ہے اور اسکے ساتھ ایک درجہ دار پہیہ لگا ہوا ہے جو کل لڑکنے کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب مرتسم نقطہ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو پہیہ کے نشانات سے کسی خاص پیمانہ پر رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ ایک سلاخ پر تین نقطے ا، ب، ج ہیں، یہ سلاخ اپنے مستوی میں حرکت کرتی ہے اور یہ نقطے بند منحنی مرتسم کرتے ہیں جن کے رقبے س~ا~، س~ب~، س~ج~ ہیں، سلاخ بغیر پورا چکر لگانے کے اپنے اصلی مقام پر پھر آجاتی ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{ب ج} \times \text{س}_{ا} + \text{ج ا} \times \text{س}_{ب} + \text{ا ب} \times \text{س}_{ج} = ۰$$

جہاں خطوط ب ج، ج ا، ا ب کی علامات انکی سمتوں کے مطابق ہیں اور

س~ا~، س~ب~، س~ج~ کی علامتیں دفعہ ۱۰۱ کے قاعدہ سے متعین ہوتی ہیں۔

۲۸۔ سلاخ ا ب پر ایک نقطہ پ ہے، یہ سلاخ ایک ہی مستوی میں حرکت کرتی ہے اور ایک گردش پوری کرنے کے بعد اپنے اصلی مقام پر واپس آجاتی ہے۔

ثابت کرو کہ $$\text{س}_{پ} = \frac{\text{ا س}_{ب} + \text{ب س}_{ا}}{\text{ا} + \text{ب}} - \pi \, \text{ا ب}$$

جہاں ا = ا پ، ب = پ ب اور س~ا~، س~ب~، س~پ~ کا مفہوم وہی ہے جو اوپر کے سوال میں ہے۔

اس لئے ثابت کرو کہ اگر سلاخ کے سرے ا، ب ایک بند بیضوی منحنی پر حرکت کریں تو $\text{س}_{ا} - \text{س}_{پ} = \pi \, \text{ا ب}$ [ہولڈچ]

۲۹ — مستقل طول کا ایک خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت متقاطع خطوط مستقیم پر ہمیشہ واقع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ پ ایک ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ $\pi \times$ اپ $\times$ پ ب ہے۔

امثلہ* ۳۷

حجم

۱ — منحنی ما = ب جب $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی نسیم موج کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے ثابت کرو کہ وہ حائط اسطوانہ کا نصف ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ ایک مخروط ناقص کا حجم جس کے سرے متوازی ہیں

$\frac{1}{3}\,\text{ف}\left\{\text{ق}_1+\sqrt{\text{ق}_1\text{ق}_2}+\text{ق}_2\right\}$ ہے جہاں ق_1، ق_2 اسکے سروں کے رقبے ہیں اور ف ان کے درمیان عمودی فاصلہ ہے۔

۳ — محور لا کے گرد قائم زائد $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کی گردش سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کے ایک قطعہ کا حجم جسکی اونچائی ا ہو جیسے راس سے ناپا جائے ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا جس کا نیم قطر ا ہو۔

۴ — ایک قطعہ کرہ دو متوازی مستویوں سے گھرا ہوا ہے جن کا درمیانی عمودی فاصلہ ف ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا حجم، اس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع ف ہے اور جسکی عمودی تراش کا رقبہ کہ مستوی سروں کے رقبوں کا اوسط حسابی ہے بقدر اس کرہ کے حجم کے زیادہ ہے جس کا قطر ف ہے۔

۵ — ایک نیم کرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے قاعدہ سے فاصلہ ۲ ا جب ۱۰° پر، قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیم کرہ کے حجم کی

* دیکھو صفحہ (۲۷۴) کے نیچے کا نوٹ۔

تضعیف کرتا ہے۔

۶ — نیم قطر ا کے ایک ٹھوس کرہ کا جو حصہ، نیم قطر ب (< ۲ ا) کی کروی سطح کے اندر شامل ہے جس کا مرکز ٹھوس کرہ کی سطح پر واقع ہے اس حصہ کو نکال دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے خلا کا حجم نیم قطر ب کے نیم کرہ کے حجم سے بقدر

$\frac{\pi ب^4}{4 ا}$ کے کم ہے۔

۷ — جو قبہ مکافی ج ما = (لا - ا) (لا - ب) اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{30} \pi (ا - ب)^5 / ج^2$$

۸ — اگر ایک قطعہ مکافی معین کے گرد گھومے تو حجم پیدا شدہ حائط اسطوانہ کے $\frac{8}{15}$ کے مساوی ہوگا۔ ۲۷۷

۹ — ایسے مجسم کا حجم جو مکافی کو راس پر کے مماس کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے حائط اسطوانہ کا $\frac{1}{5}$ ہے۔

۱۰ — مکافی ما² = ۴ ا لا کا وہ حصہ جو وتر خاص سے کٹتا ہے، مرتب کے گرد گردش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ پیدا شدہ حلقہ نما مجسم کا حجم $\frac{152}{15} \pi ا^3$ ہے۔

۱۱ — وتر لا = ف منحنی ا ما² = لا³ سے جو حصہ کاٹتا ہے اسے محور لا کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ حجم پیدا شدہ اس اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جو اسی قاعدہ پر قائم ہے۔

۱۲ — مثلثی منشور کے ایسے مقطوعہ کا حجم جس کو کوئی دو مستوی قطع کریں

$$\frac{1}{3} (ف_1 + ف_2 + ف_3) ق$$ ہے جہاں $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$

تین متوازی کناروں کے طول ہیں اور ان کناروں پر عمود وار تراش کا رقبہ ق ہے۔

۱۳ — ایک پیپے کی وسطی تراش کا نیم قطر ب ہے اور ہر سرے کا نیم قطر ا ہے۔ ثابت کرو کہ پیپے کا حجم ہے $\frac{\pi}{15} (3 ا^2 + 4 ا ب + 8 ب^2) ف$

جہاں ف پہیے کا طول ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ پہیے کا مکون منحنی مکانی کی ایک قوس ہے۔

۱۴۔ دائرہ کی ایک قوس اپنے وتر کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کا حجم ہے

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \text{جب}^3 \alpha + \frac{2}{3}\pi r^3 \text{جب}\,\alpha\,\text{جم}^2\alpha - 2\pi r^3 \alpha\,\text{جم}\,\alpha$$

جہاں r نیم قطر ہے اور 2α قوس کی زاوی پیمائش ہے۔

۱۵۔ وہ شکل جو نیم قطر r کے دائرہ کے ربع اور اس کے سروں تک کے مماسوں سے گھری ہوئی ہے ان مماسوں میں سے ایک کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ہے

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\pi r^3$$

۱۶۔ دو مساوی نیم قطر r کے قائم مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دونوں سے گھرا ہوا حجم $\frac{16}{3}r^3$ ہے۔

اگر ان کے محور زاویہ α پر قطع کریں تو حجم $\frac{16}{3}r^3$ قم α ہے۔

۱۷۔ اگر قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ محور x کے گرد گھومے تو وہ حجم جو اس سطح، متقاربوں سے تکوین شدہ مخروط اور محور x کے علی القوائم دو مستویوں کے درمیان گھر جاتا ہے جہاں مستویوں کا فصل ف ہے اس مستدیر اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور نیم قطر b۔

۱۸۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا نصف زاویہ α ہے، اس کا راس نیم قطر r کے ایک کرہ کی سطح پر ہے اور اس کا محور مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے اس حصہ کا حجم جو مخروط سے باہر ہے $\frac{4}{3}\pi r^3$ جم$^4\alpha$ ہے۔ ۲۷۸

۱۹۔ اگر دفعہ ۱۰۹ کے سمپسن کے طریقہ میں جہاں دو متوازی تراشوں S_1، S_3 کے درمیان جو حجم شامل ہے وہ معلوم کیا گیا ہے، درمیان کی تراش S_2 تراشوں S_1، S_3 سے بالترتیب فاصلوں h، k پر ہو تو ضابطہ ہوگا

$\frac{ه+ک}{۶ هک}$ {(۲ه-ک) ک س۱ + (ه+ک)۲ س۲ + (۲ک-ه) ه س۳}

امشلہ ۲۸ *

منحنی خط اور سطحیں

۱- جیب کے منحنی ما = ب جیب $\frac{لا}{ب}$ کی پوری موج (Undulation) کا طول ایک ناقص کے محیط کے مساوی ہے جسکے نیم محور $\sqrt{ب^۲ + ب^۲}$ اور ا ہیں۔

۲- کسی منحنی میں مبدأ سے اسکے کسی مماس پر جو عمود (ع) کھینچ سکتا ہے اسکے طول کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو۔

$$ع = لا \frac{فرما}{فرس} - ما \frac{فرلا}{فرس}$$

نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر کا مماس پر قائم ظل ہے

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} \quad یا \quad ر \frac{فرر}{فرس}$$

۳- زنجیرہ (Catenary) ما = ج جمز $\frac{لا}{ج}$ کی کسی قوس کو جو اُس سے شروع ہوتی ہے، مرتب کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح π (ج لا + ما س) ہے جہاں لا، ما، س اس قوس کے دوسرے سرے سے متعلق ہیں۔

۴- گردشی سکافی نما سے محور پر علی القوائم مستوی سے منحنی سطح کا جو حصہ کٹتا ہے وہ ہے

$$\frac{۱}{۶} \frac{\pi ب}{ف^۲} \left\{ (۴ف^۲ + ب^۲)^{\frac{۳}{۲}} - ب^۳ \right\}$$

* صفحہ ۳۷۴ کے نیچے نوٹ دیکھو۔

جہاں محور کا طول ف ہے اور احاطہ کرنے والے دائرہ کا نیم قطر ب۔

۵ — مکافی ما^2 = ۴ ا لا کی قوس کو جو مبدا اور معین لا = ۳ ا کے درمیان ہے محور لا کے گرد گھمانے سے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے وہ $\frac{56}{3}$ π ا^2 ہے۔

۶ — مکافی کی قوس کا وہ حصہ جو راُس اور وتر خاص کے درمیان واقع ہے محور کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مجسم کی منحنی سطح قاعدہ کے رقبہ کی ۱٫۲۱۹ گنا ہے۔

۲۷۹

۷ — دائرہ کی قوس اپنے وتر کے گرد گھومتی ہے، ثابت کرو کہ سطح جو پیدا ہوتی ہے وہ ہے ۴ π ا^2 (جب عا − عا جم عا) جہاں ا نیم قطر ہے اور قوس کا زاوی ناپ ۲ عا ہے۔

۸ — نیم قطر ا کے دائرہ کا ربع اپنے سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ منحنی سطح کا رقبہ π (π − ۲) ا^2 ہے۔

۹ — نیم قطر ا کا ایک ثابت کرہ ہے۔ اسکی سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر نیم قطر ر کا ایک متغیر کرہ بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسکی سطح کا رقبہ جو ثابت کرہ کے حائل ہونے سے قطع ہوتا ہے وہ زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ ر = $\frac{4}{3}$ ا۔

۱۰ — کرہ کا ایک مماسی مخروط کھینچا گیا ہے اور مخروط کے راُس کو مرکز مان کر دو کروی سطحیں کھینچی گئی ہیں جو کرہ اور مخروط دونوں کو قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کرہ اور مخروط پر جو متعلقے قطع ہوتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں۔

امثلہ ۳۹

تقریبی تربیع۔ اوسط قیمتیں

۱ — لوگ$_و$ ۲ کو ضابطہ لوگ$_و$ ۲ = $\int_{1}^{2} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ سے حاصل کرنیکے لئے سمسن کا قاعدہ لگاؤ۔ [ٹھیک قیمت ہے لوگ$_و$ ۲ = ۰٫۶۹۳۱۴۷...]

۲ — π کی قیمت ضابطہ $\frac{\pi}{6} = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$ سے حاصل کرو۔

۳۔ (دفعہ ۱۱۴) تین معین والے سمسن کے طریقہ میں، درمیانی معین ما_2 معینوں ما_1، ما_3 سے غیر مساوی فاصلوں ھ، ک پر ہے، اس صورت میں ضابطہ ہے

$$\frac{1}{6}(\text{ھ}+\text{ک})(\text{ما}_1 + 4\,\text{ما}_2 + \text{ما}_3) + \frac{1}{6}(\text{ھ}^2 - \text{ک}^2)\left(\frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{ھ}} - \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_3}{\text{ک}}\right)$$

۴۔ قطع ناقص کے قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان قطروں کے مربعوں کا اوسط، اعظم اور اصغر محوروں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۵۔ طول ا کے خط مستقیم پر ایسے ہی کوئی نقطہ لے لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ دو حصوں کی سطح کا اوسط رقبہ $\frac{1}{6}\text{ا}^2$ ہے اور دو حصوں کے مربعوں کے مجموعہ کی اوسط قیمت $\frac{2}{3}\text{ا}^2$ ہے۔

۲۸۰

۶۔ اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو وقت کے مساوی اور لامتناہی چھوٹے وقفوں پر کی رفتاروں کا اوسط مربع

$$\frac{1}{3}(\text{و}_\text{ب}^2 + \text{و}_\text{ب}\text{و}_1 + \text{و}_1^2)$$ کے مساوی ہے جہاں $\text{و}_\text{ب}$ اور و_1 ابتدائی اور آخری رفتاریں ہیں۔

۷۔ سادہ موسیقی حرکت میں ثابت کرو کہ اوسط توانائی بالحرکت، زیادہ سے زیادہ توانائی بالحرکت کا نصف ہے۔

۸۔ ایک ذرہ، دی ہوئی رفتار، مگر اختیاری زاویہ ارتفاع سے پھینکا گیا ہے، ثابت کرو کہ اوسط افقی ٹپہ (Range) زیادہ سے زیادہ ٹپہ کا ۶۲۶۶ ا ہے۔

۹۔ ناقص کے ماسکی نیم قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان ماسکی نیم قطروں کا اوسط، نیم محور اصغر کے مساوی ہے۔

۱۰۔ نیم کرہ کی منحنی سطح پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ قاعدہ کے مستوی سے نیم قطر کے نصف کے مساوی ہے۔

۱۱۔ نیم کرہ کے قطب سے کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ۹۴۲۹ء ا ہے جہاں کرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۱۲ — دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے، مرکز سے، نیز محیط پر کے کسی نقطہ سے اس رقبہ پر کے نقطوں کے فاصلوں کے تکافیوں کی اوسط قیمتیں دریافت کرو۔

$$\left[\frac{۲}{ا} \text{ ، } \frac{۴}{\pi ا}\right]$$

۱۳ — ایک ڈنڈے کی شکل گردشی لمبوترے ناقص نما کی ہے جو بہت لمبا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اوسط تراشی رقبہ مرکز پر کی تراش کے رقبہ کا دوتہائی ہے

۱۴ — برقائی ہوئی گول ٹکیا پر سطحی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $(ا^۲ - ر^۲)^{\frac{1}{2}}$ جہاں ٹکیا کا نیم قطر ا ہے اور ر مرکز سے نقطہ کا فاصلہ ہے۔ اوسط کثافت کی نسبت مرکز پر کی کثافت کے ساتھ دریافت کرو۔

۱۵ — اگر شہابوں (Camets) کے مدار فضا میں یکساں طور پر منقسم ہوتے تو طریق الشمس کے ساتھ ان کا اوسط میلان نیم قطری ($۲۹۶ء۵۷^\circ$) ہوتا۔

۱۶ — نیم قطر ا کی کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ایک ایسے نقطہ پ سے جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے $ج + \frac{۱}{۳}\frac{ا^۲}{ج}$ ہے اگر پ کرہ کے باہر ہو اور $ا + \frac{۱}{۳}\frac{ج^۲}{ا}$ ہے اگر پ کرہ کے اندر ہو۔

۱۷ — ایک دائرہ کا نیم قطر ا ہے، اس کے محیط پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱ء۲۷۳ ا ہے۔

۱۸ — ایک دائری رقبہ کا نیم قطر ا ہے۔ اس پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے ۱ء۱۳۲ ا ہے۔

۱۹ — کرہ کے اندر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ سطح پر کے ایک دئے ہوئے نقطہ سے $\frac{۶}{۵}$ ا ہے۔

۲۸۱ ۲۰ — اگر زمین کے مرکز سے فاصلہ ر پر کثافت اس ضابطہ $ث = ث. \frac{جب\ م ر}{م ر}$ سے حاصل ہو جہاں م مستقل ہے تو ثابت کرو کہ

اوسط کثافت ہوگی $\frac{3\text{ث}\,(\text{جب م ا} - \text{م ا جم م ا})}{\text{م}^3\,\text{ا}^3}$ جہاں ا

زمین کا نیم قطر ہے۔

۲۱۔ کروی شکل کی کچھ کمیت ہے جس کی کثافت مرکز سے فاصلہ ر پر ث ہے، اگر نیم قطر ر کے ہم مرکز کرہ کے مادہ کی اوسط کثافت ث۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ث} = \text{ث}_1 + \frac{1}{3}\,\text{ر}\,\frac{\text{فر ث}_1}{\text{فر ر}}$$

امثلہ ۴۰

اوسط مرکز

۱۔ تکمل سے ثابت کرو کہ منحرف کا اوسط مرکز متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خط کی اس نسبت ۲ ا + ب : ا + ۲ ب سے تقسیم کرتا ہے جہاں ا، ب متوازی اضلاع کے طول ہیں۔

۲۔ منحنی صا = ب جب $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ کی ایک نیم موج اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز اس محور سے فاصلہ $\frac{1}{8}$ π ب پر ہے۔

۳۔ منحنی صا = $\frac{\text{ا}^3}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز ($\cdot$، $\frac{\text{ا}}{4}$) ہے۔

۴۔ ربع دائرہ کے سروں پر مماس کھینچنے سے قوس اور ان مماسوں میں جو رقبہ گھر جاتا ہے اس کا اوسط مرکز ہر مماس سے ۰٫۲۲۳۴ ا ہے جہاں دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔

۵۔ جو رقبہ مکافی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\text{صا}}{\text{ب}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ اور محددوں کے محوروں کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کا اوسط مرکز نقطہ ($\frac{1}{5}$ ا، $\frac{1}{5}$ ب) پر ہے۔ رکھو لا = ا جب^4 طہ

صا = ب جم^4 طہ۔

۶ — نیم قطر ا کے کرہ کو ایک مستوی کے ذریعہ جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے دو قطعوں میں تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان قطعوں کے اوسط مرکزوں کا فاصلہ کرہ کے مرکز سے $\frac{3}{4} \times \frac{(ا \pm ج)^2}{2ا \pm ج}$ ہے۔

۲۸۲ ۷ — نیم قطر ا کا ربع دائرہ ہے، اسکی قوس اور سروں کے مماسوں سے جو شکل بنتی ہے اسکو ایک مماس کے گرد پھرانے سے مجسم بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کے اوسط مرکز کا فاصلہ راس سے ۰٫۸۶۹ ا ہے۔

۸ — نوکدار محراب کی شکل کا ٹھوس جو مکافی رقبہ ا پ ن کو پ ن کے گرد پھرانے سے بنایا گیا ہے جہاں ا راس ہے اور پ ن عین ہے ثابت کرو کہ اس کا اوسط مرکز محور کو نسبت ۵ : ۱۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۹ — راس سے شروع ہو کر مکافی کی ایک قوس ا پ ہے اور پ ن راس پر کے مماس پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ شکل ا پ ن کو ا ن کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکے اوسط مرکز کا فاصلہ ا سے $\frac{5}{6}$ ا ن کے مساوی ہے۔

۱۰ — دو مساوی مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حجم کا اوسط مرکز جو ان اسطوانوں اور ان کے محوروں کے مستوی کے درمیان ہے اس مستوی سے $\frac{3}{8}$ ا کے فاصلہ پر ہے۔ جہاں ا مشترک نیم قطر ہے۔

۱۱ — ربع دائرہ اپنے ایک سرے پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے، اس طرح سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز راس سے ۰٫۸۲۶ ا کے فاصلہ پر ہے۔

۱۲ — لنگر چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی حصہ کی منحنی سطح کے اوسط مرکز کا فاصلہ اس استوائی مستوی سے $\frac{2}{ط}$ ب ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۳ — لنگر چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے اس کے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں انمیں سے کسی ایک کے حجم کا اوسط مرکز استوائی مستوی سے فاصلہ $\frac{4ب}{3ط}$

پر ہے جہاں ب تکوینی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۴- ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کو محور ما دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے، کسی ایک حصہ کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح کا اوسط مرکز، مرکز سے فاصلہ

$$\frac{۲}{۳} \times \frac{ا^۲ + ا ب + ب^۲}{ا + ب} \times \frac{ا}{ب + (ا جب^{-۱} ز) / ز}$$ پر واقع ہے جہاں ز خروج المرکز ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ ب < ا ۔ متناظر نتیجہ حاصل کرو جبکہ ب > ا ۔

۱۵- پیپس کے مسئلے لگانے سے قائم مستدیر مخروط اور قائم مستدیر مخروطِ ناقص کا حجم اور اسکی منحنی سطح دریافت کرو۔

۱۶- نیم قطر ا کے ایک اسطوانہ کے گرد ایک نالی کاٹی گئی ہے جس کی عمودی تراشِ نیم قطر ب والا ایک نصف دائرہ ہے، ثابت کرو کہ حجم جو نکالدیا گیا ہے وہ ہے $\pi^۲ ا ب^۲ - \frac{۴}{۳} \pi ب^۳$

نیز نالی کی سطح ہے $۲\pi^۲ ا ب - ۴\pi ب^۲$

۲۸۴

۱۷- ایک مستدیر اسطوانہ کا نیم قطر م ہے، اس کی سطح پر مستطیلی تراش کا ایک پیچ ناگا کاٹا گیا ہے، ثابت کرو کہ تاگے کے ایک پھیر کا حجم $۲\pi ا ب م + \pi ا ب^۲$ ہے جہاں ا، ب مستطیل کے ضلعے ہیں اور ا وہ ضلع ہے جو اسطوانہ کی سطح پر عمود وار ہے۔

۱۸- ایک بند منحنی کے محیط کے اوسط مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے اور یہ محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان حصوں کو اس خط کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتے ہیں ان کی منحنی سطحیں مساوی ہیں۔

۱۹- رقبہ ق محاور لا اور ما کے گرد گھومنے سے حجم ع اور و بالترتیب پیدا کرتا ہے۔ بتاؤ کہ کیا رقبہ پیدا ہوگا اگر یہ خط لا جم ع + ما جب ع = ع کے گرد گھومے۔ اس میں مان لیا جائے کہ

خط رقبے کو نہیں کاٹتا۔

امثلہ ۱۴

ضعفی تکملے

۱— تکملات $\iint (لا^2+ما^2)\, فرلا\, فرما$ ، $\iint \left(1-\frac{لا^2}{ر^2}-\frac{ما^2}{ب^2}\right) فرلا\, فرما$ کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ انہیں ناقص $\frac{لا^2}{ر^2}+\frac{ما^2}{ب^2}=1$ کے رقبہ پر لیا جائے۔

۲— ثابت کرو کہ اسطوانوں $لا^2+ما^2=2رلا$ ، $ی^2=2رلا$ کے درمیان کا حجم $\frac{128}{18}ر^3$ ہے۔

۳— نیم قطر ۲ر کا ایک کرہ بنایا گیا ہے جبکہ اس کا مرکز نیم قطر ر کے اسطوانہ کی سطح پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح کا جو حصہ کرہ کے اندر ہے اس کا رقبہ $16ر^2$ ہے۔

۴— حجم جو ناقصی مکافی نما $2ی=\frac{لا^2}{پ}+\frac{ما^2}{ق}$ ، اسطوانہ $لا^2+ما^2=ر^2$ اور مستوی $ی=0$ کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ہے $\frac{\pi ر^4(پ+ق)}{8پ ق}$

۲۸۴

نواں باب

خاص منحنی

۱۱۹ - جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور رکھتے ہیں -

ما = ف (لا) .... (۱)

کے نمونہ کے جبریہ منحنیات کو مرتسم کرنیکے طریقوں کی توضیح اس کتاب کے مختلف حصوں میں کی گئی ہے جہاں ف (لا) منطق تفاعل تھا اور ان ترسیمی طریقوں میں متقاربوں، اعظم اقل معینوں اور نقاط انعطاف کا دریافت کرنا بھی شامل تھا۔ (دیکھو دفعات ۱۳، ۱۴، ۵۱، ۶۷)

عام طور پر جبریہ منحنیات کا مطالعہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن

ما^2 = ف (لا) .... (۲)

نمونہ کے منحنیات کی بحث میں کچھ جگہ وقف کردینا سودمند ہوگا۔

اس مساوات سے لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی لیکن مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں، اس لئے منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہے نیز چونکہ ما^2 لازماً مثبت ہے اس لئے لا کی اُن سمتوں کے اندر (اگر ایسی موجود ہوں) جن کے لئے ف (لا) منفی ہے منحنی کا کوئی حقیقی حصہ نہیں ہوسکتا۔

مثلاً اگر ف (لا) میں ایک سادہ جزو ضربی لا - لا$_1$ شامل ہوتا ہے اور اس لئے مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

ما^2 = (لا - لا$_1$) فا (لا) .... (۳)

تو بائیں جانب کا رکن علامت بدلتا ہے جیسے لا، لا_1 کی قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اِس لئے $(\text{لا}_1, 0)$ کے ایک جانب معین خیالی ہے۔

نیز اس نقطہ پر $\left(\dfrac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^2 = \dfrac{\text{ما}^2}{(\text{لا} - \text{لا}_1)^2} = \dfrac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{لا}_1}$

اور اس لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \infty$، اِس لئے مماس و لا پر عمود وار ہے۔

اگر برعکس اسکے ف (لا) دوہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^2 = (\text{لا} - \text{لا}_1)^2\, \text{فہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

۲۸۵ تو بائیں جانب کا جملہ علامت نہیں بدلتا جبکہ لا قیمت لا_1 میں سے گزرتا ہے۔ اسلئے معین نقطہ $(\text{لا}_1, 0)$ کے دونوں جانب حقیقی ہے یا دونوں جانب خیالی۔ پہلی صورت میں نقطہ زیر بحث میں سے منحنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک زاویہ پر قطع کرتی ہیں اور ایک ”عقدہ“ بناتی ہیں۔ دوسری صورت میں $(\text{لا}_1, 0)$ طرق پر اکیلا یا ”مزدوج“ نقطہ ہے۔ عقدہ پر مماسی خطوط کی سمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = \underset{\text{لا} \to \text{لا}_1}{\text{نہا}} \frac{\text{ما}^2}{(\text{لا} - \text{لا}_1)^2} = \text{فہ}(\text{لا}_1)$$

اگر ف (لا) تہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^2 = (\text{لا} - \text{لا}_1)^3\, \text{فہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

تو بائیں جانب کا جملہ نقطہ $(\text{لا}_1, 0)$ پر علامت بدلتا ہے۔ پس اس نقطہ کے ایک جانب منحنی خیالی ہے۔ نیز چونکہ $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اس صورت میں صفر ہے منحنی محور لا کو مس کرتا ہے۔

یہاں چند مثالیں دیجاتی ہیں۔ ابتدا میں ایسی صورتیں ہیں جن میں ف (لا) صحیح اور منطق بھی ہے۔

مثال ۱ - جس صورت میں ف (لا) پہلے یا دوسرے درجہ کا ہے شلاً

ما^۲ = ا لا + ب ، ما^۲ = ا لا^۲ + ب لا + ج ..... (۶)

تو منحنی ایک مخروطی ہے جس کا محور لا صدری محور ہے۔

مثال ۲ - کعبی منحنیات

ما^۲ = ا لا^۳ + ب لا^۲ + ج لا + د .... (۷)

میں بعض دلچسپ صورتیں شامل ہوتی ہیں۔

(ا) اگر بائیں جانب کے خطی اجزاے ضربی حقیقی اور الگ الگ ہوں تو اس مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

ا ما^۲ = (لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ) .... (۸)

اور یہ فرض کر لینے سے عمومیت کم نہیں ہو جاتی کہ ا مثبت ہے اور عہ > بہ > جہ

لا > عہ کے لئے اور بہ > لا > جہ کے لئے معین خیالی ہیں۔ (عہ، ۰) اور (بہ، ۰) کے درمیان ما^۲ کی اعظم قیمت ہے۔ اسلئے منحنی ایک بند حلقہ اور ایک لاانتہا شاخ پر مشتمل ہے۔ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے

ما^۲ / لا^۳ = (۱/ا) (۱ - عہ/لا) (۱ - بہ/لا) (۱ - جہ/لا)

یعنی منحنی، لا کے محور پر تقریباً عمود وار ہونے جانیکا میلان رکھتا ہے۔

(ب) اگر (۷) کے بائیں طرف کا جملہ صرف ایک حقیقی جزو ضربی رکھتا ہو تو مساوات کو یوں لکھا جا سکتا ہے

ا ما^۲ = (لا - عہ) (لا^۲ + پ لا + ق) .... (۹)

جہاں پ^۲ > ۴ ق - اس صورت میں منحنی محور لا سے صرف ایک دفعہ ملتا ہے۔

(ج) شکل (۸) سے شکل (۹) میں گذر دو طرح سے عمل میں آتا ہوا خیال کیا جا سکتا ہے

۲۸۶

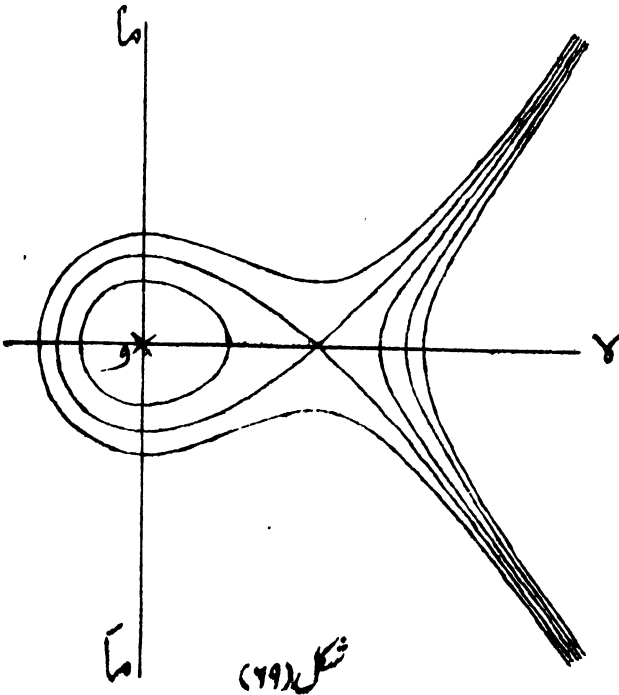
ایک نقطۂ نظر یہ ہے کہ عہ، بہ، جہ میں سے بڑی دو قیمتوں کے مل جانے سے یہ خاص صورت پیدا ہو یعنی

ا ما^۲ = (لا - عہ) (لا - بہ)^۲ .... (۱۰)

یہاں لا < عہ کے لئے ما خیالی ہے اور لا > عہ کے لئے حقیقی ہے لیکن لا = بہ کے لئے یہ صفر ہوتا ہے۔ نقطہ (بہ، ۰) یہاں عقدہ ہے۔ اسے یوں خیال کیا جا سکتا ہے کہ پہلی صورت کے حلقہ اور لا متناہی شاخ کے ملنے سے یہ پیدا ہوا ہے۔

(د) اگر عہ، بہ، جہ میں سے دو چھوٹی قیمتیں مل جائیں تو

ا ما^2 = (لا - عہ)^2 (لا - جہ) .... (۱۱)

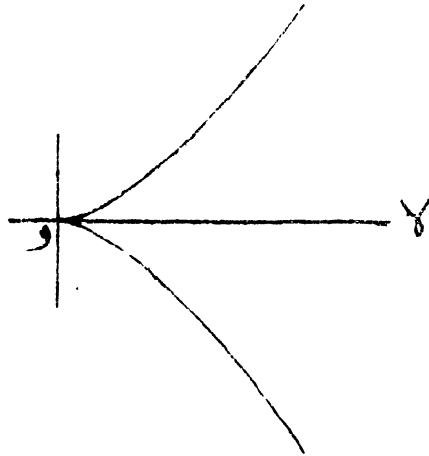
لا < جہ کے لئے ما خیالی ہوگا سوائے لا = ا کے جبکہ یہ صفر ہوگا اس صورت میں نقطہ (عہ، ۰) اکیلا نقطہ ہے۔ ایسا خیال کیا جا سکتا ہے کہ صورت اول کے حلقہ کے معدوم ہو جانے سے یہ شکل پیدا ہوتی ہے۔

شکل (۶۹)

اِن تمام صورتوں کی شکل (۶۹) میں توضیح کی گئی ہے۔ دائیں جانب سے شروع ہو کر نمونہ (۹) کا ایک منحنی ملتا ہے جو ایک اکیلی لا متناہی شاخ پر مشتمل ہے۔

۲۸۷ اسکے بعد وہ صورت جس میں لامتناہی شاخ ہے اور اسکے ساتھ اکیلا نقطہ (۱، ۰) لگا ہوا ہے، اس کی مساوات نمونہ (۱۱) کی ہے۔ اِس ترتیب میں اگلی صورت یہ ہے لامتناہی شاخ اور نقطہ و کے گرد بیضوی حلقہ، یہ نمونہ (۸) کی مساوات ہے۔ اِس سے بعد کی منزل میں بیضوی حلقہ اور لامتناہی شاخ مل گئے ہیں اور ملنے سے عقدہ مع ایک حلقہ کے پیدا کرتے ہیں، مماثل نمونہ کی مساوات (۱۰) ہے۔ آخیر میں ایک اکیلی شاخ ہے جو حلقہ کے باہر سے گزرتی ہے سو اس کے لئے پھر نمونہ (۹) کی مساوات ہے*۔

شکل (۷۰)

* شکل کے منحنی مساوات

$$ما^2 = \frac{1}{4}(لا^3 - ۳ لا^2 + ج)،$$

سے مرتسم کئے گئے ہیں، جبکہ ج = -۲، ۰، ۲، ۴، ۶۔ ان کا باہمی ربط آسانی سے ذہن میں آسکتا ہے اگر انہیں ایک سطح (دفعہ ۳۴) کے متواتر گھیر خطوط⊙ خیال کیا جائے مثلاً یہ سطح پہاڑی دامن میں کسی چوٹی کے قریب و جوار کی منحنی سطح ہو سکتی ہے۔

⊙ Contour lines

(ع) نہایت ہی خاص صورت میں جبکہ تینوں مقداریں عما، بما، جما منطبق ہو جائیں تو

$$ا\,ما^{2} = (لا - عما)^{3} \quad \text{........} \quad (۱۳)$$

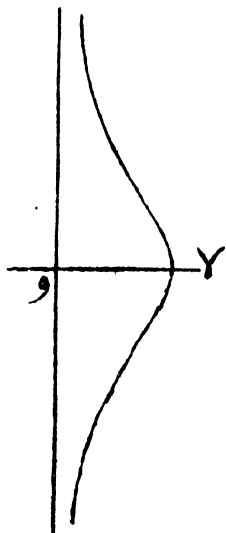
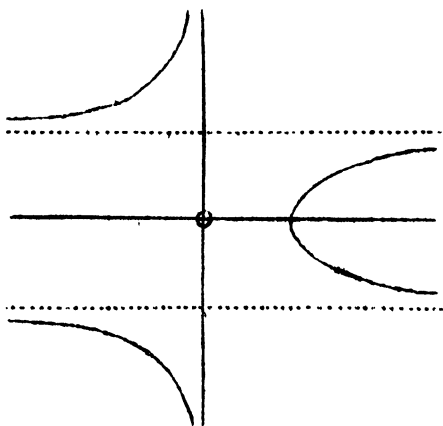
اس صورت میں منحنی "نیم کعبی مکافی" کہلاتا ہے۔ اسکے (عما، ۰) پر ایک قرن ہے۔ اسے عقدہ کی انتہائی شکل خیال کیا جا سکتا ہے جو حلقہ کے معدوم ہو جانے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ دیکھو شکل ۷۰، جہاں عما = ۰۔

اگر مساوات (۲) میں ف (لا) منطبق ہو مگر صحیح نہ ہو تو نسب نما کی حقیقی اصلوں سے (اگر کوئی ہوں) متقارب ملیں گے جو محور ما کے متوازی ہونگے بشرطیکہ لا کی ایسی قیمتوں کے لئے جو ان اصلوں سے بہت کم متفاوت ہوں ما² مثبت ہو۔

۲۸۸ **مثال ۳** - $\dfrac{ما^{2}}{ا^{2}} = \dfrac{لا - ا}{لا} \quad \text{........} \quad (۱۳)$

محور ما متقارب ہے، نیز لا کی بڑی قیمتوں کے لئے ما = ± ا تقریباً، لا = ۰ اور لا = ا کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ حقیقی نہیں۔ دیکھو شکل ۷۱۔

شکل (۷۱)

شکل (۷۲)

مثال ۴۔ $\frac{ما^{2}}{ا^{2}} = \frac{ا - لا}{لا}$ .... (۱۴)

لا منفی کے لئے اور لا > ا کے لئے ما خیالی ہے۔ دیکھو شکل ۷۲۔
اس منحنی کو اگنیسی کی ڈائن (Witch of Agnesi) کہتے ہیں۔

مثال ۵۔ $ما^{2} = لا^{2}\,\frac{ا + لا}{ب - لا}$ .... (۱۵)

مبدا پر عقدہ ہے اور منحنی محور لا کو دوبارہ (-ا، ۰) پر کاٹتا ہے۔ اگر لا > ب یا لا < -ا تو ما خیالی ہوتا ہے۔ خط لا = ب متقارب ہے۔ دیکھو شکل ۷۳۔

مثال ۶۔ $ما^{2} = \frac{لا^{3}}{ب - لا}$ .... (۱۶)

یہ مساوات (۱۵) میں ا کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ حلقہ اس صورت میں قرن ہوجاتا ہے شکل ۷۴۔ اس کو لبلابی خط (Cissoid) کہا جائے گا۔

اشکال ۷۳ و ۷۴
اگلے صفحہ
پر
ہیں۔

و

شکل (۷۴)

شکل (۷۳)

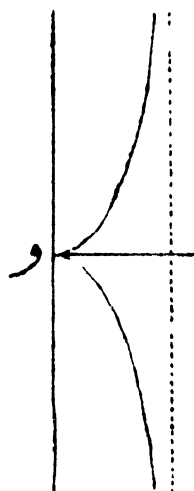
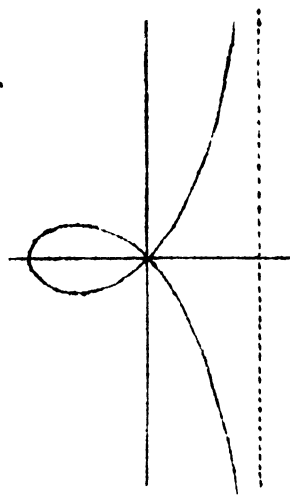
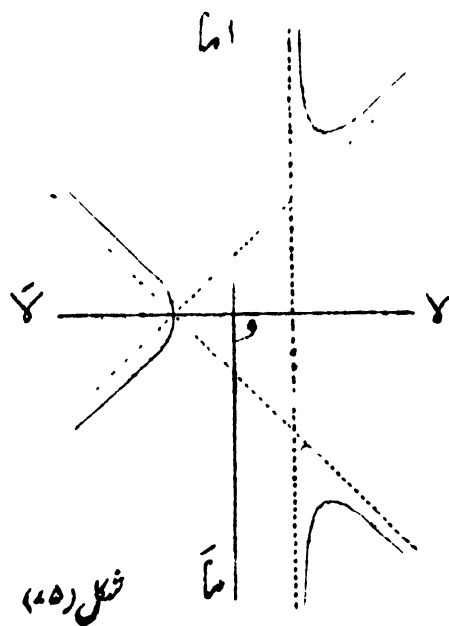
ما

لا' و لا

ما'

شکل (۷۵)

۲۹۰

مثال ۷ ۔ $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \dfrac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا} - \text{ا}}$ .... (۱۷)

چونکہ ما خیالی ہے جبکہ ا > لا > - ا سوائے اس صورت کے جبکہ لا = ۰، مبدأ اکیلا نقطہ ہے۔ مائل متقارب دریافت کرنیکے لئے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \pm \left(\frac{1 + \frac{\text{ا}}{\text{لا}}}{1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(1 + \frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right)\left(1 - \frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \left(1 + \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}^2} + \cdots\cdots \right) \text{.......... (۱۸)}$$

اس لئے خطوط $\text{ما} = \pm (\text{لا} + \text{ا})$ .... (۱۹)

متقارب ہیں۔ شکل ۵۷۔

۱۲۰ ۔ ماورائی منحنی ۔ زنجیرہ ۔ خط بجھڑی (Tractrix)

اب چند مشہور منحنیات پر بحث کی جائے گی جو اکثر ماورائی ہیں اور جن کی تعریف اُس نمونہ کی مساواتوں سے کی جاتی ہے جن کا حوالہ دفعہ ۱۱۶ میں دیا گیا۔ یعنے

$$\text{لا} = \text{فا}(\text{ت})، \quad \text{ما} = \text{خا}(\text{ت})$$

جہاں ت بدلنے والا متبدل ہے۔

جو شکل ایک یکساں زنجیر جاذبہ ارض کے ماتحت آزادانہ طور پر لٹکنے سے اختیار کرتی ہے اسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہیں گے۔

سکونیات کے ابتدائی اصولوں کی مدد سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نچلے نقطہ (ا) سے شروع ہو کر زنجیر پر کے کسی نقطہ پ تک کا قوسی طول س ہو اور پ پر کے مماس کا افق کے ساتھ میلان سا ہو تو

$$\text{س} = \text{ا} \;\text{مس}\; \text{سا} \text{ .... (۲)}$$

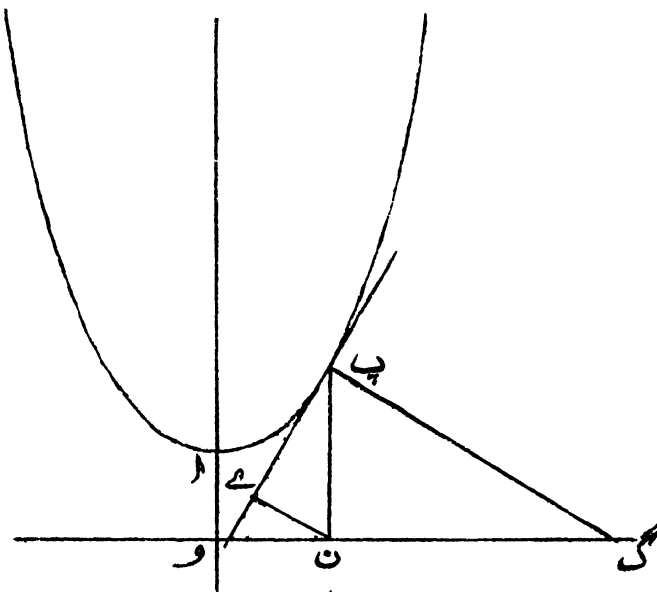
جہاں ا مستقل ہے۔ اس لئے اگر لا، ما افقی اور انتصابی محدد ہوں تو

فر لا/فر سا = فر لا/فر س × فر س/فر سا = جم سا × ا قط² سا = ا قط سا

فر ما/فر سا = فر ما/فر س × فر س/فر سا = جب سا × ا قط² سا = ا مس سا قط سا

.... (۳)

تکمل کرنے سے لا = ا لوگ مس (π/۴ + سا/۲)، ما = ا قط سا ..... (۴)

مستقل حذف کر دینے سے یہ مراد ہے کہ مبدأ کو کسی خاص نقطہ پر لیا گیا ہے جس کا ابتک تعین نہیں کیا گیا تھا۔ چونکہ ضابطہ (۴) سے لا = ۰ اور ما = ا جبکہ سا = ۰۔ اس لئے ظاہر ہے کہ مبدأ نقطہ ا کے انتصابا نیچے فاصلہ ا پر واقع ہے۔ (۴) سے کارٹیزی مساوات بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۹۱

شکل (۷۶)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ار}} = \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{سا}}{۲}\right) = \text{لوک}(\text{قط سا} + \text{مس سا})$$

جس سے

$$\left.\begin{aligned} \text{قط سا} + \text{مس سا} &= \text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ار}}} \\ \text{قط سا} - \text{مس سا} &= \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ار}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اس لئے جمع اور تفریق سے

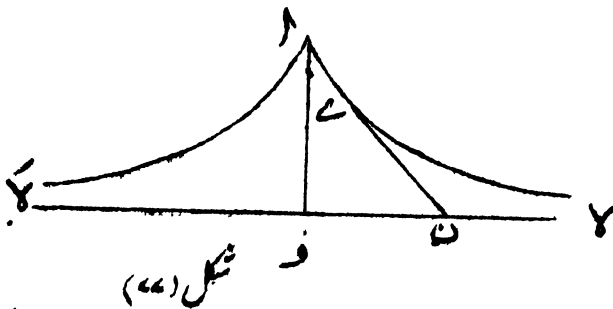
$$\left.\begin{aligned} \text{ما} = \text{ا قط سا} &= \frac{\text{ا}}{۲}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ار}}} + \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ار}}}\right) = \text{اجمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ار}} \\ \text{س} = \text{ا مس سا} &= \frac{\text{ا}}{۲}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ار}}} - \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ار}}}\right) = \text{ابجمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ار}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۶)$$

ابعض اور نماحیتیں شکل سے بآسانی حاصل ہوتی ہیں۔ اگر پ ا ن معین ہو،

پ ت مماس، پ گ عماد اور ن ے پایہ سے مماس پر معین تو

ن ے = ما جم سا = ا، پ ے = ا مس سا = س

چونکہ پ ے زنجیرہ کی قوس کے مساوی ہے، اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ے کا اگلا متصل مقام ے ن کے اندر ہے، دوسرے الفاظ میں ے ن ے کے طریق کا مماس ہے۔ اس لئے اس طریق یا منحنی کی خصوصیت یہ ہے کہ اس کا مماس ے ن مستقل ہوتا ہے۔ اس منحنی کو خط جرّی کہتے ہیں۔ اور وہ اسلئے کہ یہ ایک وزنی ذرہ کا راستہ یا لوکس ہے جسکو رسی کے ذریعہ ایک کھردرے افقی مستوی پر گھسیٹا جائے جبکہ اسی کا دوسرا سرا ن ایک خط مستقیم (و ۲) پر ترسیم کرے۔

۲۹۲

شکل (۷۷)

منحنی کے نقطہ ا پر ایک قرن ہے اور محور لا اس کا متقارب ہے۔

اِس منحنی کی اور خاصیتیں اس کے مماس کے (طول میں) مستقل ہونے کی بنا پر حاصل ہوسکتی ہیں۔ مثلاً چونکہ اس کے دو متصل مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ مف سا بناتے ہیں اِس لئے مماس جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس تکملہ $\frac{1}{2}\int$ اُ فر سا سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اِس طرح منحنی اور متقارب کے درمیان کا کل رقبہ $\frac{1}{2}$ ط اُ^{2} کے مساوی ہے۔

۱۲۱ ـ لیسازو کے منحنی (Lissajous' Curves) ـ یہ منحنی علم آواز میں خاص اہمیت رکھتے ہیں اور دو سادہ موسیقی حرکتوں کے ترکیب دینے سے، جو علی القوائم سمتوں میں ہوں یہ منحنی پیدا ہوتے ہیں۔ انہیں اسطرح تعبیر کیا جا سکتا ہے

لا = ا جم (ن ت + سہ)، ما = ب جم (نَ ت + صہ) ...(۱)

نیز یہ ظاہر ہے کہ مقداروں صہ، صہ میں سے ایک کو کوئی مناسب قیمت دیدی جا سکتی ہے کیونکہ اس کے معنے یہ ہیں کہ وقت کے مبدأ کا خاص انتخاب کیا گیا ہے۔

جس صورت میں دور $\frac{2\pi}{ن}$، $\frac{2\pi}{نَ}$ متوافق ہوں تو ت کے اسقاط سے لا، ما میں جبریہ ربط مل سکتا ہے۔

مثال ۱ ـ جس صورت میں ن = نَ تو ہم لکھ سکتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جم ن ت ..... (۲)

جس سے $\frac{لا}{ا}$ ـ $\frac{ما}{ب}$ جم صہ = ـ جب ن ت جب صہ،

$\frac{ما}{ب}$ جب صہ = جم ن ت جب صہ

مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے ملتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{2\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ا}\,\text{ب}}\ \text{جم صہ} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{جب}^2\,\text{صہ} \quad \ldots\ldots (۳)$$

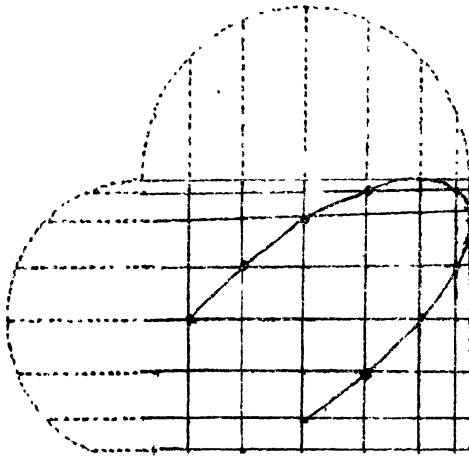
۲۹۳

یہ قطع ناقص ہے۔ خاص صورت میں جبکہ صہ = ۰ یا صہ = π قطع ناقص بگڑ کر ایک خط مستقیم

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \pm \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

بن جاتا ہے۔

اگر دور ٹھیک ٹھیک برابر مساوی نہ ہوں تو شکل مرتسمہ کو قطع ناقص خیال کیا جاسکتا ہے جو دونوں ترکیبی حرکتوں کی اضافی ہیئت صہ کے مسلسل بدلنے سے بتدریج اپنی شکل بدلتا ہے

شکل (۸۰)

جب قطع ناقص (۲) کو اسکے صدری محوروں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے تو متحرک نقطہ کے محدد یہ شکل اختیار کرتے ہیں

لا = ا جم (ن ت + صہ)، ما = ب جب (ن ت + صہ) ....(۵)

ن ت + صہ کی تطبیق ہم "خروج المرکز زاویہ" کے ساتھ کرتے ہیں اور چونکہ ن ت + صہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) ایک ایسے نقطہ کے قائم ظل کی طرح حرکت کرتا ہے جو نیم قطر ا کا دائرہ مستقل رفتار ن ا کے ساتھ مرتسم کرے۔ چونکہ دائرہ سے ناقص میں بدلنے کے لئے کوئی لامتناہی چھوٹا فرازی نسبت سے بدلتا ہے جس نسبت سے کہ متوازی نیم قطر، اسلئے معلوم ہوتا ہے کہ ناقصی حرکت میں کسی نقطہ پ پر کی رفتار ن × ج د ہوگی جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے اور ج مرکز ہے۔

اسس کو "ناقصی موسیقی" کہتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر نَ = ۲ ن تو لکھو

لا = اجم ن ت، ما = ب جم (۲ ن ت + صہ) ....(۶)

اس صورت میں ما اپنے دور میں سے دگنی تیز رفتار سے گزرتا ہے اور نقطہ (۰، ب جم صہ) دو مرتبہ عبور ہوتا ہے جیسے ن ت بقدر ۲ π کے بڑھتا ہے۔ اسلئے منحنی بالعموم دو حلقوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

جبکہ صہ = ± $\frac{\pi}{2}$ تو منحنی دونوں محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے اور جبری مساوات یہ ہوتی ہے

۲۹۴

$$\frac{ما^2}{ب^2} = ۴ \frac{لا^2}{ا^2}\left(۱ - \frac{لا^2}{ا^2}\right) \quad \text{........(۷)}$$

جب صہ = ۰ یا π تو منحنی گر کر مکافی کی ایک قوس بن جاتا ہے

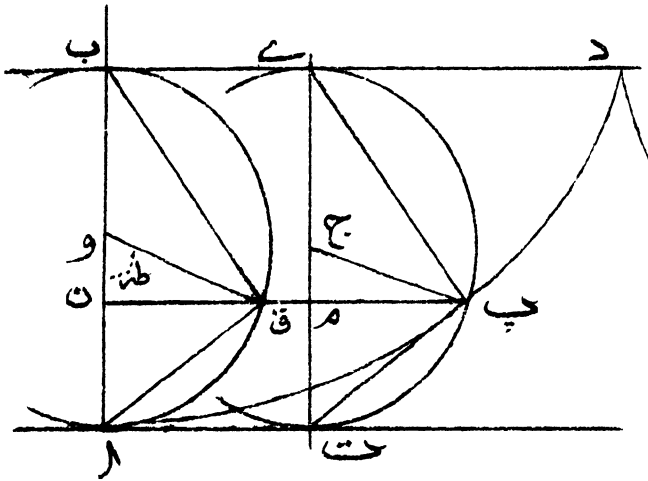
$$\frac{ما}{ب} = \pm\left(۲ \frac{لا^2}{ا^2} - ۱\right) \quad \text{........(۸)}$$

جب دوروں کا باہمی ربط بالکل ٹھیک نہیں ہوتا تو منحنی ان دو مکافی قوسوں کے درمیان بطور انتہائی شکلوں کے اہتزاز کرتا ہے*۔

* شکل ۸۰ میں لیسا ژو کے منحنی بنانے کے طریقہ کی نشان دہی کی گئی ہے۔ اس میں انتصابی اور افقی خطوط ہیں جو مختلف معاون دائروں کے مساوی الفصل نقطوں میں سے کھینچے گئے ہیں اور ان سے وقت کے مساوی وقفے تعبیر ہوتے ہیں۔

ان منحنیات کو کھینچنے کی کئی مناظری اور میکانی ترکیبیں ہیں ان کے بیان اور انکے مختلف نمونوں کے متعلق تجربی علم آواز کی کتابوں کی طرف رجوع کیا جائے۔

۱۲۲ — خط تدویر — خط تدویر وہ منحنی ہے جو ایک دائرہ کے محیط پر کا کوئی نقطہ مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہو۔ ظاہر ہے کہ یہ منحنی بیشمار حصوں پر مشتمل ہوگا جو ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہونگے اور جن میں سے ہر ایک حصہ دائرہ کے ایک پورے دور کو تعبیر کریگا۔ شکل ذیل میں ا جیسے نقطے جہاں منحنی ثابت خط مستقیم یا قاعدہ ب د سے دور سے دور ہے راس کہلاتے ہیں، متواتر راسوں کے درمیان کے نقاط جیسے د جہاں منحنی قاعدہ سے ملتا ہے "قرن" (Cusp) کہلاتے ہیں، خط ا ب کو جو ایک راس میں سے گذرتا ہے اور قاعدہ پر عمود وار ہے منحنی کا محور کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط تشاکل کا محور ہے۔

شکل (۷۹)

محور ا ب کو قطر مان کر جو دائرہ بنایا جائے اسکو حوالہ کا دائرہ ماننا مناسب ہوگا۔ فرض کرو کہ لڑھکنے والے دائرہ کا کوئی اور مقام ہے پ ت ہے، قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس ت ہے، مرکز ج ہے، پ میں سے گذرنیوالے

قطر کا مقابل کا سرا ت ہے اور مرسم نقطہ کا مقام پ ہے۔ پ م ن کو قاعدہ کے متوازی کھینچو کہ یہ ت ے سے م پر ا ب سے ن پر اور حوالہ کے دائرہ سے ق پر ملے۔ اگر ا ت اور ا ب کو بالترتیب لا اور ما کے محور مانا جائے تو پ کے محدد ہونگے

لا = ن پ = پ ے + م پ، ما = ا ن = ج ت - ج م

فرض کرو کہ لڑکنے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور طہ وہ زاویہ (پ ج ت) ہے جس میں سے یہ دائرہ گھومتا ہے جیسے مرسم نقطہ ا سے پ تک سفر کرتا ہے۔ اس طرح ب ے = ا طہ، پ م = ا جب طہ، ج م = ا جم طہ اس لئے

لا = ا (طہ + جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ) ...... (۱)

ان مساواتوں سے منحنی کے تمام خواص حاصل ہوتے ہیں۔

اگر مماس کا میلان ا ت کے ساتھ یا عماد کا ب ا کے ساتھ سا ہو

$$\text{تو}\quad \text{مس سا} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ + جم طہ}} = \text{مس}\frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\text{جس سے}\qquad \text{سا} = \frac{\text{طہ}}{۲}\quad ....\ (۲)$$

چونکہ زاویہ ت ے پ نصف ہے زاویہ ت ج پ کا اسلئے ے پ منحنی کے نقطہ پ پر عماد ہے اور پ ت مماس۔ مقابلہ کرو دفعہ ۶۴ ا کے ساتھ دیکھیے۔

منحنی کی قوس (س) معلوم کرنے کے لئے

$$\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}\right)^۲ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر طہ}}\right)^۲ = ا^۲\left[(۱ + \text{جم طہ})^۲ + \text{جب}^۲\text{طہ}\right] = ۴ا^۲\text{جم}^۲\frac{\text{طہ}}{۲}$$

$$\text{اس لئے دفعہ ۱۱۱ کی مدد سے}\quad \text{س} = \int ۲ا\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲}\,\text{فر طہ} = ۴ا\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{۲}$$

یا سا کی رقوم میں س = ۴ ا جب سا .... (۳)
کوئی مستقل جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر س کا مبدا ا پر لیا جائے۔
علم حرکت میں یہ رشتہ ضروری ہے۔

چونکہ ت پ = ت ے جب سا اس لئے

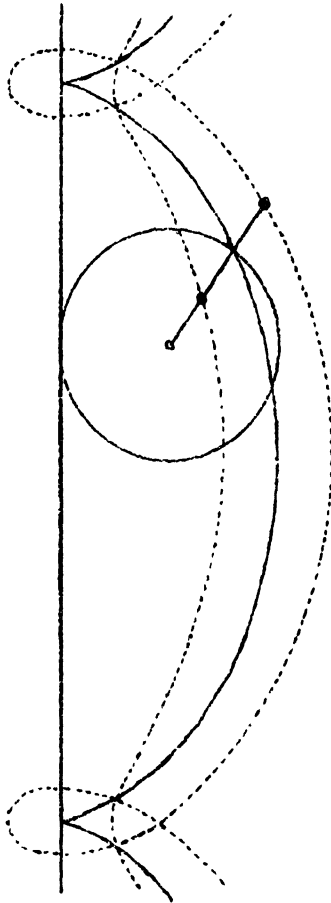
قوس ا پ = ۲ ت پ = ۲ وتر ا ق ...... (۴)

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک قوس کا طول ۸ ا ہے۔
اگر رکھا جائے ما؛ ے م = ا (۱ + جم طہ) .... (۵)
تو منحنی اور قاعدہ کے درمیان رقبہ

= ∫ ما ذلا = ا۲ ∫ (۱ + جم طہ)۲ ذطہ = ۴ ا۲ ∫ جم۴ طہ/۲ ذطہ

= ۸ ا۲ ∫ جم۴ سا ذسا

اس تکملہ کو حدود ± π/۲ کے درمیان لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رقبہ جو قاعدہ اور منحنی کے ایک محراب کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ کون دائرہ کے رقبہ کا تین گنا ہے۔

اگر ایک دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑکے تو کوئی نقطہ جو بلحاظ دائرہ کے ثابت ہو اثناء حرکت میں ایک منحنی طے کریگا جسے ہم استداری خط یا محض استداری (Trochoid) کہینگے۔

۲۹۶

شکل (۸۰)

شکل ۷۹ میں اگر مرسم نقطہ نیم قطر ج پ کے اندر مرکز سے فاصلہ ک پر ہو تو اس کے محدد ہونگے

لا = ا طہ + ک جب طہ ، ما = ا ـ ک جم طہ .... (۶)

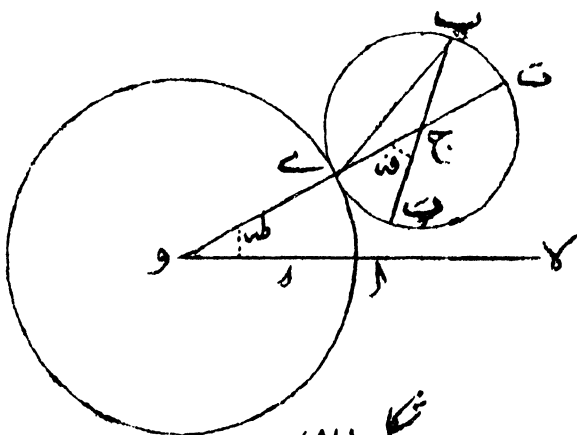
جب ک > ا تو حلقے پیدا ہوتے ہیں جو (ک = ا) کی خاص صورت میں بگڑ کر قرن ہو جاتے ہیں۔ جب ک < ا تو منحنی قاعدہ سے نہیں ملتا

۲۹۷

شکل ۸۰ میں صورتیں ک = $\frac{۱}{۲}$ ر ک = ر ک = $\frac{۳}{۲}$ ر دکھائی گئی ہیں۔
(۶) سے یہ بآسانی ثابت ہوتا ہے کہ استداری کے کسی نقطہ پر کا عاد لڑھکنے والے دائرہ کے نقطہ تماس کے متناظر محل میں سے گذرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

۲۲۳۔ برتدویر اور درتدویر۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک دائرہ لڑھکتا ہے مؤخر الذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ اثنائے حرکت میں جو طریق مرسم کرتا ہے اسے ہم برتدویر (Epicycloid) کہینگے اگر متحرک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر واقع ہو اور درتدویر (Hypocycloid) کہینگے اگر یہ اندر واقع ہو*۔ جن برتدویروں میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے پورا گرد آجاتا ہے انہیں امتیاز کی خاطر گرد تدویر (Pericycloid) کہا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ثابت دائرہ کا مرکز و ہے اور لڑھکنے والے دائرہ کا مرکز کسی مقام میں ج ہے، نقطہ تماس ے ہے اور مرسم نقطہ پ ہے۔ نیز فرض کرو کہ قطر پ ج پ' کا دوسرا سرا پ' ابتدا میں نقطہ ا پر تھا۔ ہم معیاری صورت وہ لینگے جس میں لڑھکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہے۔ فرض کرو کہ

و ا = ر، ج پ = ب، ∠ ے و ا = طہ، ∠ ے ج پ = فہ

شکل (۸۱)

* پراکٹر (Proctor) نے اپنی کتاب تدویر کا رسالہ Treatise on the cycloid, etc. (1876). میں تدویر کی اس بہتر تعریف کو اختیار کیا۔

ع پ کا میلان و ا کے ساتھ طہ + فہ ہے، اگر د کو محوروں کا مبدا
اور و ا کو محور لا مانا جائے تو قائم ظل سے پ کے محدد حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} لا &= (ا + ب) \text{ جم } طہ + ب \text{ جم } (طہ + فہ) \\ ما &= (ا + ب) \text{ جب } طہ + ب \text{ جب } (طہ + فہ) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۱)$$

۲۹۸ یا چونکہ ا طہ = قوس ا ے = قوس پ ے = ب فہ ...... (۲)

$$\left\{\begin{aligned} لا &= (ا + ب) \text{ جم } طہ + ب \text{ جم } \frac{ا + ب}{ب} طہ \\ ما &= (ا + ب) \text{ جب } طہ + ب \text{ جب } \frac{ا + ب}{ب} طہ \end{aligned}\right. \ldots\ldots (۳)$$

نقطہ پ، جس بر تدویر کو مرتسم کرتا ہے وہ دوسری رقموں کے سر ون
میں ب کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

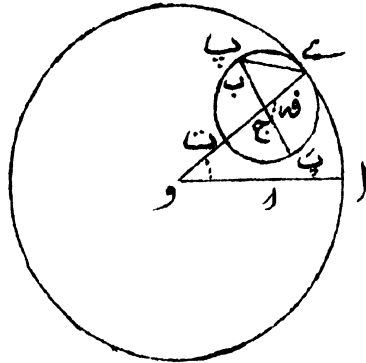
$$\left\{\begin{aligned} لا &= (ا + ب) \text{ جم } طہ - ب \text{ جم } \frac{ا + ب}{ب} طہ \\ ما &= (ا + ب) \text{ جب } طہ - ب \text{ جب } \frac{ا + ب}{ب} طہ \end{aligned}\right. \ldots\ldots (۴)$$

نقطہ ا پر اس کا ایک قرن ہے۔

ان دونوں صورتوں میں دائرے ع ہے پر کے نقاط کے متقابل جانبوں
میں واقع ہوتے ہیں۔ اگر یہ ایک ہی طرف واقع ہوں جیسا کہ گرد تدویر اور
در تدویر کی صورت میں تو نقطہ ب کی علامت کو تمام ضابطہ میں بدل دینا
چاہئے۔ اس طرح (۳) کے مماثل ضابطہ ملتا ہے

$$\left\{\begin{aligned} لا &= (ا - ب) \text{ جم } طہ - ب \text{ جم } \frac{ا - ب}{ب} طہ \\ ما &= (ا - ب) \text{ جب } طہ + ب \text{ جب } \frac{ا - ب}{ب} طہ \end{aligned}\right. \ldots\ldots (۵)$$

اسکی تصدیق طالب علم خود کرے۔ دیکھو شکل ۸۲۔ در تدویر میں

ا > ب اور گرد تدویریں ا < ب

شکل (۸۲)

۲۹۹

اسی طرح پ کے طریق کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} لا &= (ا - ب) \text{ جم } طہ + ب \text{ جم } \frac{ا - ب}{ب} طہ \\ ما &= (ا - ب) \text{ جب } طہ - ب \text{ جب } \frac{ا - ب}{ب} طہ \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۶)$$

برتدویر کے کسی نقطہ پر مماس معلوم کرنیکے لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے [چونکہ $\frac{فہ}{فرطہ} = \frac{ا}{ب}$]

$$\frac{فرما}{فرلا} = -\frac{\text{جم } طہ + \text{جم}(طہ + فہ)}{\text{جب } طہ + \text{جب}(طہ + فہ)} = -\text{جم}\left(طہ + \frac{فہ}{۲}\right) \ldots (۷)$$

شکل ۸۱ کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ $طہ + \frac{فہ}{۲}$، ے پ کا میلان ہے و ا کے ساتھ۔ اِس لئے ے پ برتدویر کا پ پر عماد ہے۔ اسی طرح کا نیتجہ گرد تدویر اور درتدویر کے لئے مساواتوں (۵) سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

نیز (۱) سے

$$\left(\frac{\text{فر}\,ا}{\text{فر}\,فہ}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر}\,ما}{\text{فر}\,فہ}\right)^2 = \frac{(ا+ب)^2 ب^2}{ا^2}(۲+۲\ \text{جم}\ فہ) = \frac{۴(ا+ب)^2 ب^2}{ا^2}\ \text{جم}^2\ \frac{فہ}{۲}$$

یا $\frac{\text{فر}\,س}{\text{فر}\,فہ} = \frac{۲(ا+ب)ب}{ا}\ \text{جم}\ \frac{فہ}{۲}$ .... (۸)

پس $س = \frac{۴(ا+ب)ب}{ا}\ \text{جب}\ \frac{فہ}{۲}$ .... (۹)

کسی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں اگر س = ۰ جبکہ فہ = ۰
اگر عماد سے پ کا میلان و ا کے ساتھ سا ہو تو

$سا = طہ + \frac{فہ}{۲} = \frac{ا+۲ب}{۲ا}\ فہ$ .... (۱۰)

اس لئے $س = \frac{۴(ا+ب)ب}{ا}\ \text{جب}\ \frac{ا}{ا+۲ب}\ سا$ ...... (۱۱)

ضابطہ (۹) کی ایک سادہ تعبیر ہے شکل ۱۸ سے معلوم ہوتا ہے کہ
$ت\,پ = ۲ب\ \text{جب}\ \frac{فہ}{۲}$ جس سے

*

$س = ۲\ \frac{ا+ب}{ا} \times$ وتر ت پ .... (۱۲)

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک منحنی کا طول $\frac{۸(ا+ب)ب}{ا}$ ہے۔

گردتدویر اور درتدویر کے متعلق متناظر نتائج ب کی علامت بدلنے سے بآسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

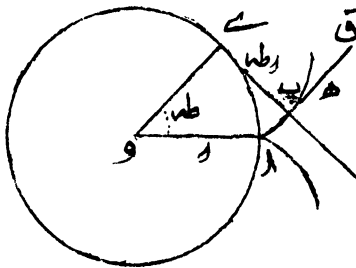
جو منحنی لڑھکنے والے دائرہ کا کوئی ایسا نقطہ مرتسم کریگا جو محیط پر واقع نہیں ہوتا اسے بالترتیب براستداری (Epitrochoid) یا دراستداری (Hypotrochoid) ۲۰۰

* نیوٹن کا (Principia, lib. i) مسئلہ ۴۹ -

خط کہا جائیگا بموجب اسکے کہ نقطہ باہر ہو یا اندر۔ اگر مرتسم نقطہ کا فاصلہ لڑکنے والے دائرہ کے مرکز سے ک ہو تو مختلف صورتوں میں محددوں لا، ما کے لئے جملے دوسری رقوم کے (صرف) سروں میں ب کی بجائے ک لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۴۔ خاص صورتیں۔

(۱) اگر ثابت دائرہ کا نیم قطر لا انتہا بڑا ہو تو دالبس تدویر کی صورت پر ہم آجاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۳ (۱) سے متناظر مساواتیں بآسانی حاصل ہوتی ہیں اگر (ا) کی بجائے لا + ا اور ا طہ = ب فہ اور (آخرلامر) طہ = . لکھا جائے۔

(۲) اس کے بعد، لڑکنے والے دائرہ کے نیم قطر کو لا انتہا بڑا بنانے سے، ایک ایسے خط مستقیم کے کسی نقطہ کا طریق ملتا ہے جو ایک ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے اس تعریف کے مطابق جو منحنی ملتا ہے اسے ہم دائرہ کا دریچیہ (Involute) کہینگے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۴۔ اسکی مساواتیں دفعہ ۱۲۳ (۴) کی انتہائی صورت کے طور پر معلوم ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ شکل سے فوراً لکھی جا سکتی ہیں۔

شکل (۸۳)

ہمیں شکل سے یہ حاصل ہوتا ہے

لا = ا جم طہ + ا طہ جب طہ
ما = ا جب طہ ـ ا طہ جم طہ ۔۔۔۔۔۔۔۔ (۱)

اس کے متناظر استداری منحنی ہے

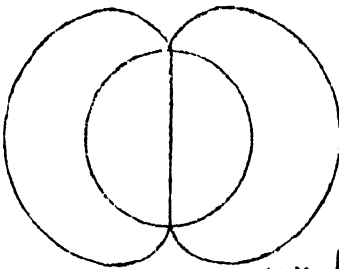
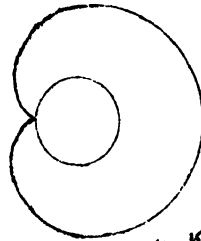
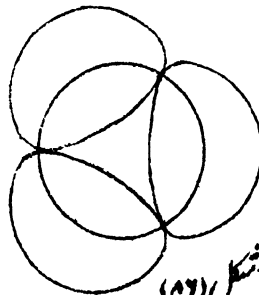
لا = (ا + ھ) جم طہ + ا طہ جب طہ
ما = (ا + ھ) جب طہ + ا طہ جم طہ .... (۲)

جہاں شکل میں ھ = پ ق اور ق مرسم نقطہ ہے۔ خاص صورت ھ = -ا سے "ارشمیدس کا لولب" حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۶)۔

(۳) اگر نیم قطر ا، ب متوافق ہوں تو گردشوں کی کسی پوری تعداد کے بعد مرسم نقطہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آئیگا اور اس کے بعد اس کا راستہ اس کے پرانے طریق پر منطبق ہوگا۔ ایسی صورت میں منحنی جبریہ ہوتا ہے کیونکہ لا، ما کے لئے جو جملے حاصل ہوتے ہیں ان سے مثلثی تفاعل ساقط ہو سکتے ہیں۔ بعض صورتوں میں مساوات کی قطبی شکل زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

۳۰۱

شکل (۸۵) شکل (۸۴)

شکل (۸۶)

اشکال ۸۴، ۸۵، ۸۶ میں "بر" اور "مدور" تدویریں دکھائی گئی ہیں جن میں رکنے والے

دائرہ کا نیم قطر ثابت دائرہ کے نیم قطر کے ساتھ بالترتیب نسبت ۱، ½، ⅓ رکھتا ہے۔ ایک دو صورتیں خاص طور پر مشہور خاصیتیں رکھتی ہیں، ان کا ہم تفصیلی معائنہ کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ خط ضوبری (Cardioid)۔

اگر دفعہ ۱۲۳ (۳) میں ب = ا رکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

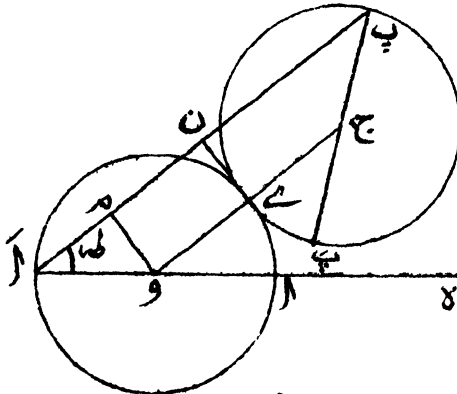
لا = ۲ ا جم طھ + ا جم ۲ طھ، ما = ۲ ا جب طھ + ا جب ۲ طھ

جس سے لا + ا = ۲ ا (۱ + جم طھ) جم طھ، ما = ۲ ا (۱ + جم طھ) جب طھ ..... (۳)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (- ا، ۰) کو قطب مان کر جو سمتی نیم قطر کھینچا جائے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ر = ۲ ا (۱ + جم طھ) .... (۴)

یہ اور طرح سے بھی شکل ۸۷ سے ظاہر ہے جہاں

اَپ = ۲ اَن = ۲ (وے + اَم)

شکل (۸۷)

متناظر استداری خط ان مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

لا = ۲ ا جم طھ + ک جم ۲ طھ، ما = ۲ ا جب طھ + ک جب ۲ طھ

۴۰۲ نقطہ (ـ ک ، ۰) کو قطب ماننے سے یہ ضابطے اِس مساوات کے معادل ہیں

ر = ۲ (ا + ک جم طہ) .... (۵)

جو گھونگا منحنی (Limaçon) کی قطبی مساوات ہے (دفعہ ۱۲۷)۔ یہ مساوات بھی باآسانی ہندسی طریق پر حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۲۔ ایک دائرہ اپنے سے دگنے نصف قطر والے دائرہ کے اندر لڑکتا ہے۔ ۱۲۳ (۶) میں رکھو ب = ½ ا تو حاصل ہوگا

لا = ا جم طہ ، ما = ۰ .... (۶)

یعنی لڑکنے والے دائرہ کے محیط پر کا مرسم نقطہ ثابت دائرہ کا ایک قطر مرتسم کرتا ہے۔

نیز متناظر استداری منحنی ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = (ب + ک) جم طہ ، ما = (ب ـ ک) جب طہ ..... (۷)

اور یہ قطع ناقص ہے جس کے نیم محور ب ± ک ہیں۔ نیز اگر لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہوگی۔

ہندسی تخیلات کی بناء پر بھی یہ نتائج باآسانی حاصل ہوتے ہیں۔ لڑکنے والا دائرہ ہمیشہ ثابت دائرہ کے مرکز و میں سے گذرتا ہے اور اگر لڑکنے والے دائرہ کا نقطہ پ ابتداء میں نقطہ ا پر منطبق ہو تو قوس ے پ = قوس ے ا ۔ اب چونکہ نصف قطروں کی باہمی نسبت ۱ : ۲ ہے اس لئے قوس ے پ کے سامنے اس کے محیط پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہونا چاہیئے جو قوس ے ا کے سامنے اسکے اپنے دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ و پ اور و ا سمت میں منطبق ہوتے ہیں اور پ ثابت قطر و ا کو مرتسم کرتا ہے۔ نیز چونکہ زاویہ پ و پَ زاویہ قائمہ ہے اس لئے لڑکنے والے دائرہ کے قطر پ پَ کا دوسرا سرا ثابت دائرہ کا وہ قطر مرتسم کرتا ہے جو و ا پر علی القوائم ہے۔ اس لئے پ پَ مستقل ۴۰۳ طول کا ایک خط مستقیم ہے جس کے سرے دو علی القوائم خطوط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ ان حالات کے ماتحت پ پَ پر کا کوئی اور نقطہ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۵۸ امثال ا کے ساتھ۔

شکل (۸۸)

مثال ۳۔ ایک دائرہ ایک ایسے ثابت دائرہ کے باہر لڑکتا ہے جس کا نیم قطر اسکے نیم قطر کا نصف ہے نیز لڑکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کو پورا گھیر لیتا ہے۔

دفعہ ۱۲۳ کے ضابطوں (۵) سے حاصل ہوتا ہے جبکہ ب = ۲ا

$$لا = ۱جم\,طہ - ۲ا\,جم\,\frac{طہ}{۲}،\ ما = ۱جب\,طہ - ۲ا\,جب\,\frac{طہ}{۲}$$

$$یا\ \ لا - ا = -۲ا(۱+جم\,\frac{طہ}{۲})\,جم\,\frac{طہ}{۲}،\ ما = -۲ا(۱+جم\,\frac{طہ}{۲})\,جب\,\frac{طہ}{۲} \ldots (۸)$$

اگر ہم رکھیں $طہَ = \frac{طہ}{۲} + \pi$ تو ظاہر ہے کہ گرد تدویر کی مساوات حسب ذیل ہوگی جبکہ اس کا قطب (ا، ۰) لیا جائے

$$ر = ۲ا(۱-جم\,طہَ) \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

اور یہ خط صنوبری ہے۔

اس نتیجہ میں اور اوپر کی مثال ا کے نتیجہ میں تعلق دفعہ ۱۵۰ سے معلوم ہوگا۔

مثال ۴۔ "چار قرنوں والا ور تدویر"۔

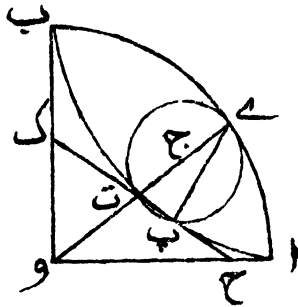
دفعہ ۱۲۳ (۶) میں رکھو $ب = \frac{ا}{۴}$ تو حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{۳}{۴} ا جم طہ + \frac{۱}{۴} ا جم ۳ طہ = ا جم^۳ طہ$$
$$ما = \frac{۳}{۴} ا جب طہ - \frac{۱}{۴} ا جب ۳ طہ = ا جب^۳ طہ \quad (۱۰)$$

جس سے منحنی بآسانی مرتسم ہوسکتا ہے۔ اسکی کارٹیزی صورت یہ ہے

$$لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}} \quad (۱۱)$$

بعض اوقات اس منحنی کو "ستارہ نما" کہا جاتا ہے، اس کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ اسکے مماس کا طول جو محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہوتا ہے۔ اگر شکل ۸۹ میں مرتسم نقطہ پ ہو اور ت پ مماس ہو تو یہ آسانی سے دیکھا جائیگا کہ زاویہ ج ت پ زاویہ ا و ج کا دوچند ہے، اس لئے ج ک = ۲ و ت = ا ۲۰۴

نیز دیکھو شکل ۱۲۵ دفعہ ۱۴۵۔

شکل (۸۹)

۱۲۵ - دائری حرکتوں کا ایکدوسرے پر انطباق - بردورے

تدویری اور استداری منحنی جنکا ذکر دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴ میں کیا گیا ہے ایک اور طرح سے بھی پیدا ہوتے ہیں، یہ ایسے نقطوں کے طریق ہیں جنکی حرکت دو یکساں دائری حرکتوں سے مرکب ہو۔

ایک بازو وق ایک ثابت نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار ن کے ساتھ حرکت کرتا ہے، مبدأ و میں سے گذرنیوالے قائم محددوں پر اس کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت ، ما = ج جب ن ت .... (۱)

جہاں ج = وق بشرطیکہ ت کے مبدأ کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے
اگر ایک اور بازو وقَ نقطہ و کے گرد مستقل زاوی رفتار نَ کے ساتھ گردش کرے اور ایک ہی وقت میں وق کے ساتھ ابتداً محور لا سے گھومنا شروع کرے تو محوروں پر وقَ کے ظل ہونگے

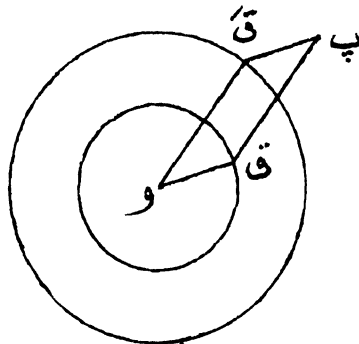
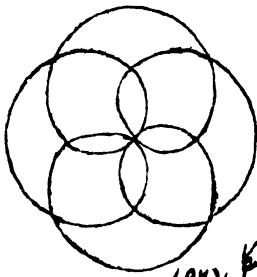
لا = جَ جم نَ ت ، ما = جَ جب نَ ت .... (۲)

جہاں وقَ = جَ۔ اگر متوازی الاضلاع وق پ قَ کی تکمیل کیجائے تو وپ سے وق اور وقَ کا ہندسی مجموعہ تعبیر ہوگا اور پ کے محدد ہونگے

لا = ج جم ن ت + جَ جم نَ ت ، ما = ج جب ن ت + جَ جب نَ ت *
.... (۳)

چونکہ قَ پ ہمیشہ وقَ کے مساوی اور متوازی رہتا ہے اس لئے پ کا راستہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو بلحاظ ایک نقطہ قَ کے دائری مدار مرتسم کرتا ہے جبکہ قَ خود نقطہ و کے گرد یکساں طور پر دائرے میں حرکت کرتا ہے۔

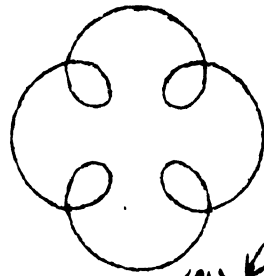
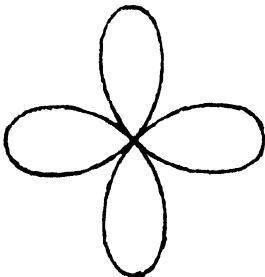
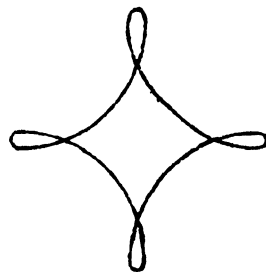
* اگر متوازی الاضلاع وق پ قَ چار ڈنڈوں کو چولوں کے ذریعہ وصل کرنے سے بنایا گیا ہو اور اگر وق، وقَ کو و کے گرد مناسب شرح سے گھمایا جائے تو و میں سے گذرنے والے کسی ثابت خط سے پ کا فاصلہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کو تعبیر کریگا جنکے دور $\frac{2\pi}{ن}$، $\frac{2\pi}{نَ}$ ہونگے۔ لارڈ کیلون کی موج گھڑی (Tidal clock) کا یہی اصول ہے اسکی مدد سے عملی طور پر شمسی اور قمری جوار بھاٹا کا انطباق ایک دوسرے پر عمل میں آتا ہے۔

اِس طور پر جو منحنی مرتسم کئے جاتے ہیں انہیں بر دورے (Epicycles) کہتے ہیں۔ اگر زاوی رفتاروں ن، نَ کی ایک ہی علامت ہو تو یہ بر دورے "راست" کہلاتے ہیں اور اگر علامتیں مختلف ہوں تو "الٹے" یا "رجعی"۔ ۳۰۵

شکل (۹۰)

شکل (۹۱)

شکل (۹۲)

شکل (۹۳)

شکل (۹۴)

۲۰۶

اشکال ۹۱ تا ۹۴ میں سیدھے اور الٹے بردوریوں کے چند نمونے دکھائے گئے ہیں*
بالکل اسی طرح سے پ کے راستہ کی یہ تعریف ہوسکتی ہے، یہ ایک نقطہ کا طریق ہے جو نقطہ ق کے لحاظ سے دائری مدار میں حرکت کرتا ہے جبکہ خود نقطہ ق، و کے گرد یکساں دائری حرکت رکھتا ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ہر بردوریہ کی دو جداگانہ طریقوں سے تکوین ہوسکتی ہے۔
یہ ظاہر ہے کہ ہر بر، اور درتدویر اور (زیادہ عام طور پر) ہر براور دراستدارہ سب کے سب بردورے ہیں کیونکہ اگر لڑکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار یکساں ہو تو اس کا مرکز ج، ثابت دائرہ کے مرکز و کے گرد یکساں طور پر ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جبکہ نیم قطر ج پ جس کے اندر مرسم نقطہ پ واقع ہے ج کے گرد یکساں گھماؤ رکھتا ہے۔ دیکھو اشکال ۸۱، ۸۲۔
بخلاف اس کے ہر ایک بردوریہ یا براستداریہ ہے یا دراستداریہ اور بالخصوص ہر ایک سیدھا بردوریہ براستداریہ ہے اور ہر الٹا بردوریہ دراستداریہ ہے۔ اس امر کو ہم اوپر کی مساوات (۳) کا، دفعہ ۱۲۳ کے نتائج کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دیکھ سکتے ہیں۔ آگے (دفعہ ۱۵۰) میں "فوری مرکز" کے نظریہ کی ضمن میں اس امر کا ایک سادہ ہندسی ثبوت دیا جائیگا۔
اشکال ۹۱ تا ۹۴ کے سیدھے اور الٹے بردوریوں کا تعلق چار قرنوں والی بر اور درتدویروں کے ساتھ واضح ہوگا۔
قدیم ہیئت میں بردورے کثرت سے استعمال ہوے۔ اگر سیاروں کے مداروں کے خروج المرکز اور میلان نظر انداز کردے جائیں تو سورج زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا خیال کیا جاسکتا ہے اور کوئی اور سیارہ اسی مستوی سطح میں

* ایسی مختلف شکلیں بے شمار ہوسکتی ہیں، بردورئے عملی طور پر ایک لاٹھی کے ذریعہ آسانی سے مرتسم ہوسکتے ہیں، کئی دلچسپ شکلیں جو اس طور پر حاصل کی گئی ہیں پروا کٹر کے رسالہ میں جس کا قبل حوالہ دیا گیا ہے دکھائی گئی ہیں، رسالہ کا صفحہ ۲۹۷ دیکھو۔

سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے، اس لئے بلحاظ زمین کے سیارہ کا مدار ایک بردوریہ ہے۔ بطلیموس کے وقت سے سولھویں صدی عیسوی تک اس امر کے متعلق یہی نظریہ قابل قبول رہا، اس کے بعد اس مظہر کے متعلق کا پرنیکی کی سادہ تشریح اور توجیہ تدریج غالب آ گئی۔

سیاروں کے اضافی مداروں میں حلقے ہیں (شکل ۹۱) جو "ساکن یا اچل نقاط" اور "رجعی حرکتوں" کا باعث ہوئے ہیں۔ دراصل یہی نقاط اور الٹی حرکتیں بطلیموس کے ہاتھوں بردوریوں کی ایجاد کا باعث ہوئیں۔

برعکس اس کے بلحاظ سورج کے جو چاند کا مدار ہے اس میں حلقے نہیں ہیں اگرچہ یہ بردوریہ ہے، علاوہ اس کے ہر مقام پر چاند کا مدار اندر کی طرف مقعر ہے۔

مثال ۱۔ اگر ترکیبی دائری حرکتوں کی زاوی رفتاریں مساوی اور مختلف العلامت ($نَ = - ن$) ہوں تو $لا = (ج + جَ)\ جم\ ن\ ت$، $ما = (ج - جَ)\ جب\ ن\ ت$

.... (۴)

یعنی محصلہ حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ خاص صورت میں جبکہ $جَ = ج$، ناقص بگڑ کر خط مستقیم رہ جاتا ہے۔

یہ مثال طبیعی علم مناظر میں اہمیت رکھتی ہے۔

مثال ۲۔ بردوریہ جو خاص صورت اختیار کرتا ہے جبکہ $جَ = ج$ قابل توجہ ہے مساواتیں (۳) ہو جاتی ہیں

$$\left.\begin{aligned} لا &= ۲ ج\ جم \left(\frac{ن + نَ}{۲}\right) ت\ جم \left(\frac{ن - نَ}{۲}\right) ت \\ ما &= ۲ ج\ جب \left(\frac{ن + نَ}{۲}\right) ت\ جم \left(\frac{ن - نَ}{۲}\right) ت \end{aligned}\right\} \quad ...... (۵)$$

یا $لا = ر\ جم\ طہ$، $ما = ر\ جب\ طہ$ .... (۶)

جہاں $طہ = \frac{ن + نَ}{۲} ت$، $ر = ۲ ج\ جم \frac{ن - نَ}{ن + نَ} طہ$ ...... (۷)

اس لئے منحنی کی قطبی مساوات اس شکل کی ہے

$$ر = ا \; جم \; م \; طہ \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

جس میں اگر م < ۱ تو بردور یہ راست ہے اور اگر م > ۱ تو یہ الٹا یا رجعی ہے
دفعہ ۱۲۵ کی شکلوں ۹۲، ۹۴ میں بالترتیب $م = \frac{۲}{۳}$، م = ۲

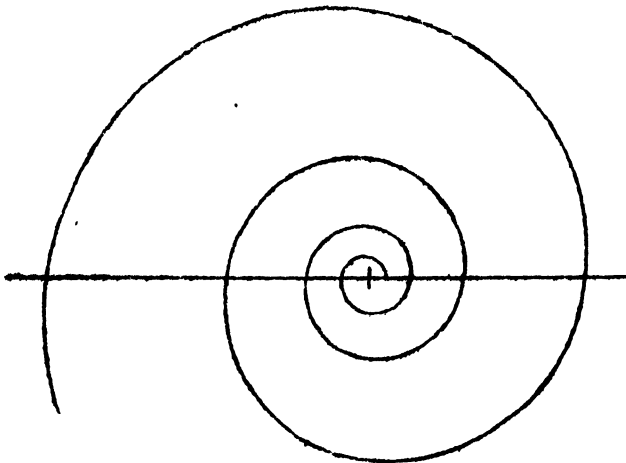
۱۲۶- قطبی محددوں کے لحاظ سے منحنی - لولبی خطوط-

کئی دلچسپ منحنی ہیں جنکی مساواتیں قطبی محددوں میں زیادہ موزوں طور پر بیان ہو سکتی ہیں پہلے ہم "لولبوں" (Spirals) کو لینگے -

(آ) "مساوی الزاویہ لولبی" یہ خاصیت رکھتا ہے کہ منحنی ہر نقطہ پر سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے۔ اگر اس زاویہ کو عا سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۶۳ کی رو سے

$$\frac{فر \; ر}{فر \; طہ} = ر \; ہم \; عا \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس کا حل ہے (دفعہ ۳۸)

$$ر = ا \; و^{طہ \; م \; عا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

شکل (۹۵)

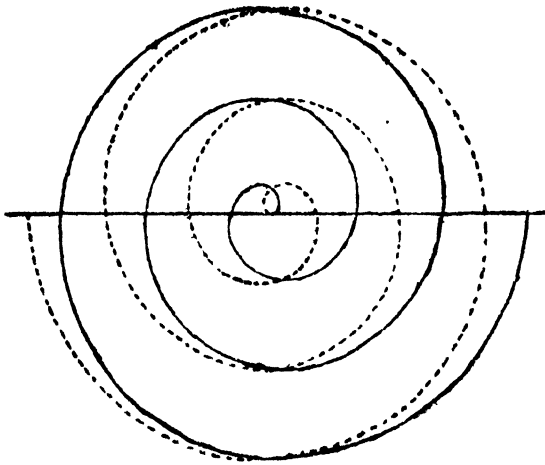
جیسے طہ، -∞ سے +∞ تک بدلتا ہے ر، صفر سے ∞ تک بدلتا ہے

۳۰۸　شکل ۹۵۔ چونکہ دفعہ ۱۱۲ کی رو سے $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ = جم عہ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی کا طول نیم قطروں ر۱، ر۲ کے درمیان ہے

$$\int_{ر_1}^{ر_2} \frac{\text{فر س}}{\text{فر ر}}\, \text{فر ر} = (ر_2 - ر_1)\ \text{قط عہ} \quad ......\ (۳)$$

(۲) "ارشمیدس کا لولب" ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے جبکہ یہ خط مستقیم خود اپنے ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔

علامات میں ر = ع ت، طہ = ن ت جس سے

ر = ا طہ ...... (۴) اگر ا = $\frac{ع}{ن}$۔

شکل (۹۶)

شکل ۹۶ میں منحنی دکھایا گیا ہے، نقطہ دار شاخ طہ کی منفی قیمتوں کے جواب میں ہے۔ اِس منحنی کی تکوین کا ایک اور طریقہ دفعہ ۱۲۴ میں بیان کیا گیا ہے۔

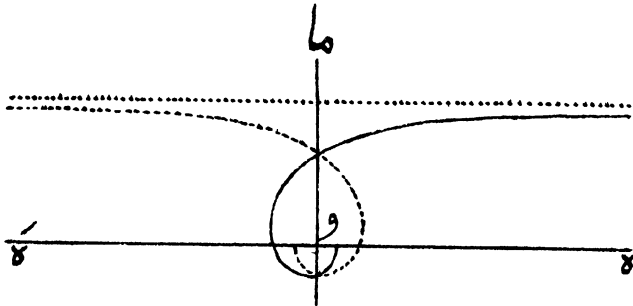
(۳) "مستکانی لولب" کی تعیین اس مساوات سے ہوتی ہے

$$ر = \frac{۱}{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اگر ما معین ہو جو ابتدائی خط پر کھینچا گیا ہے تو

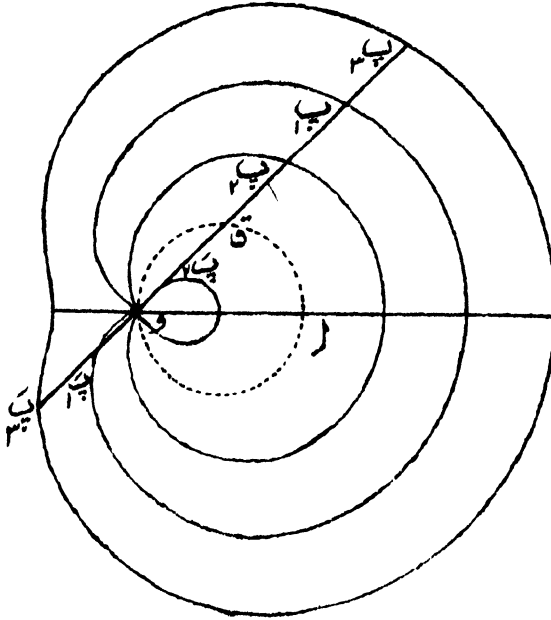
$$ما = ر جب طہ = ا \frac{جب طہ}{طہ}$$

جیسے طہ صفر کے قریب پہنچتا ہے ر لامتناہی ہو جاتا ہے مگر ما محدود انتہا ا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اسلئے خط ما = ا متقارب ہے۔
شکل ۹۷ میں نقطہ دار منحنی طہ کی منفی قیمتوں سے متعلق ہے۔ ۳۰۹

شکل (۹۷)

۱۲۷ - گھونگا منحنی (Limaçon) اور خط صنوبری -

قطر ا پر ایک ثابت دائرہ بنایا گیا ہے جس کے محیط پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے، اگر و میں سے گذرنے والے قطر کو ابتدائی خط لیا جائے تو محیط پر کے کسی نقطہ ق کا سمتی نیم قطر ہے

$$ر = ا جم طہ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

شکل (۹۸)

۳۱۰　اگر اس نیم قطر پر ق سے مساوی مستقل فاصلوں ج پر دو نقاط پ، پَ لئے جائیں تو اِن نقطوں کا طریق گھونگا منحنی کہلائیگا۔ اس کی مساوات ہوگی

ر = ا جم طہ + ج . . . . (۲)

اِس میں ہر دو نقاط پ اور پَ کے راستے شامل ہیں جبکہ طہ، صفر سے ۲ π تک بدلتا ہے۔ اگر ج < ا تو منحنی و میں سے گزرتا ہے جبکہ

طہ = جم$^{-1}$ (- ج/ا) اور اس صورت میں حلقہ پیدا ہوتا ہے شکل ۹۸ میں پ۲ اور پَ۲ سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دیکھو۔ اگر ج > ا تو ر صفر نہیں ہوسکتا پ۳، پَ۳ کا مرتسمہ منحنی شکل میں دیکھو۔

اِس خاص صورت میں جبکہ ج = ا حلقہ بگڑ کر قرن بن جاتا ہے، اس صورت میں طریق

"قلب کی شکل کا" یا صنوبری شکل کا منحنی بن جاتا ہے، اس کی مساوات ہے

ر = ا (۱ + جم طہ) .... (۳)

شکل میں پ ا پ ا سے مرتسم شدہ منحنی دکھو۔ نیز دیکھو شکل ۸۴ دفعہ ۱۲۴۔

۱۲۸۔ منحنی رⁿ = اⁿ جم ن طہ۔ کئی مشہور منحنی اس نمونہ کے اندر شامل ہوتے ہیں

رⁿ = اⁿ جم ن طہ .... (۱)

ن کی مساوی مگر مختلف العلامت قیمتوں کے لئے جو منحنی پیدا ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے منقلوب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۳۰۔

مثلاً اگر ن = ± ۱ تو دائرہ ر = ا جم طہ .... (۲)

اور خط مستقیم ر جم طہ = ا .... (۳)

حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ن = ± ۲ تو برنولی کا چشمہ منحنی* ر² = ا² جم ۲ طہ .... (۴)

اور قائم زائد ر² جم ۲ طہ = ا² .... (۵)

حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۴) سے ر کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں طہ کی ان قیمتوں کے لئے جو ± $\frac{\pi}{4}$ کے درمیان ہیں اور خیالی قیمتیں ملتی ہیں ان قیمتوں کے لئے جو $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$ کے درمیان ہیں وغیرہ وغیرہ۔ نیز ر² اعظم ہے طہ = ۰ اور طہ = π کے لئے وغیرہ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ چشمہ منحنی دو حلقوں پر مشتمل ہے اور مبدا پر اس کا ایک عقدہ ہے۔

اگر ن = ± $\frac{1}{2}$ تو خط صنوبری ر$^{\frac{1}{2}}$ = ا$^{\frac{1}{2}}$ جم $\frac{طہ}{2}$ یا ر = $\frac{ا}{2}$(۱ + جم طہ) .... (۶)

اور مکافی ر$^{-\frac{1}{2}}$ جم $\frac{طہ}{2}$ = ا$^{-\frac{1}{2}}$ یا ر = $\frac{2ا}{1 + جم طہ}$ .... (۷)

* Lemniscate.

بالترتیب حاصل ہوتے ہیں۔

۳۱۱ اگر (۱) کا لوکارثمی تفرق لیا جائے اور مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{ہم فہ} = \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{۔ ہس ن طہ} \quad \ldots\ldots (۸)$$

$$\text{یا}\quad \text{فہ} = \frac{\pi}{۲} + \text{ن طہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

طالب علم اوپر کی مختلف صورتوں میں اس نتیجہ کے مفہوم کا معائنہ کرے۔

۱۲۹۔ مماسی قطبی مساوات۔ اگر کسی منحنی کے کسی مماس پر عمود ع کھینچا جائے اور نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ر ہو تو بالعموم ع ' ر کا تفاعل ہوگا۔ جو مساوات اس تعلق کو بیان کرتی ہے اسے ہم منحنی کی "مماسی قطبی" مساوات کہینگے۔

اگر معمولی قطبی مساوات معلوم ہو تو مماسی قطبی مساوات ان ضابطوں

$$\text{ع} = \text{رجب فہ}\,،\quad \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{ہم فہ} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور منحنی کی دی ہوئی مساوات سے طہ ' فہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی (ضابطوں (۱) کے متعلق دیکھو دفعہ ۶۳)۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ر}^2}\left(1 + \text{ہم}^2\,\text{فہ}\right) = \frac{1}{\text{ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}^4}\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}\right)^2 \ldots (۲)$$

بعض اوقات سمتی نیم قطر کی بجائے اس کے متکافی یا الٹ کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ اگر لکھا جائے

$$\text{و} = \frac{1}{\text{ر}}\ \text{تو}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر طہ}} = -\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور ضابطہ (۲) ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{\text{ع}^2} = \text{ع}^2 + \left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (۴)$$

حرکیات میں استعمال کرنے کے نقطہ نظر سے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر منحنی کی مماسی قطبی مساوات دی گئی ہو مثلاً

$$\text{ع} = \text{ف}(\text{ر}) \quad \cdots\cdots\cdots (۵)$$

تو منحنی قابل تعیین ہے سوائے بلحاظ تشریق کے کیونکہ

$$\frac{\text{ر فرطہ}}{\text{فرر}} = \text{مس فہ} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ر}^2 - \text{ع}^2}} \quad \cdots\cdots\cdots (۶)$$

جس سے
$$\text{طہ} - \text{عہ} = \int \frac{\text{ع فرر}}{\text{ر}\sqrt{\text{ر}^2 - \text{ع}^2}} \quad \cdots\cdots\cdots (۷)$$

اضافہ شدہ مستقل عہ کے تغیر کا اثر صرف اتنا ہے کہ یہ منحنی کو باتمام و کے گرد ایک زاویہ میں سے گھما دیتا ہے۔

۳۱۲

مثال ۱۔ مساوی الزاویہ لولبی میں

$$\text{ع} = \text{ر جب عہ} \quad \cdots\cdots\cdots (۸)$$

مثال ۲۔ دائرہ میں ر = ۲ا جب طہ (دفعہ ۶۳) اور فہ = طہ

اس لئے $\frac{\text{ع}}{\text{ر}} = \frac{\text{ر}}{\text{۲ا}}$ یعنی $\text{ع} = \frac{\text{ر}^2}{\text{۲ا}}$ $\cdots\cdots\cdots$ (۱۰)

(۳) مکافی میں $\text{ر} = \text{ا قط}^2 \frac{\text{طہ}}{۲}$ $\cdots\cdots\cdots$ (۱۱)

جہاں ماسکہ قطب ہے۔ ایسی حالت ہوگا $\text{فہ} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\text{طہ}}{۲}$، $\text{ع} = \text{ر جم} \frac{\text{طہ}}{۲}$، جس سے

$$\text{ع}^2 = \text{ار} \quad \cdots\cdots\cdots (۱۲)$$

اس منحنی کی یہ مشہور خاصیت ہے۔

یہ مثال اور اوپر کی مثال دونوں ایک عام نتیجہ کے اندر شامل ہیں اور یہ نتیجہ اس نمونہ

ر^ن = ا^ن جم ن طہ ....(۱۳)

کے تمام منحنیات کے متعلق صادق آتا ہے۔

دفعہ ۱۲۸ (۹) کی رو سے ع = رجب فہ = رجم ن طہ ....(۱۴)

اور طہ ساقط کرنے سے ع = ر^(ن+۱) / ا^ن ....(۱۵)

مثلاً صنوبری (ن = ۱/۲) کی صورت میں ع ا = ر^۲ / ا ....(۱۶)

مثال ۴ ۔ مرکز دار مخروطوں کی مماسی قطبی مساوات یہاں دیجاتی ہے کیونکہ بعض اوقات حرکیات میں یہ استعمال ہوتے ہیں، اگرچہ ثبوت میں احصا کے استعمال کی ضرورت نہیں۔

فرض کرو کہ مبدا مرکز پر ہے۔ مخروطی کی کارٹیزی مساوات یہ ہے

لا^۲ / ا^۲ ± ما^۲ / ب^۲ = ۱ ....(۱۷)

اگر ب ما مزدوج نیم قطر ہو تو مرکز دار مخروطیوں کے معلومہ خواص کی بنا پر

ع ب ما = ا ب، ب ما^۲ ± ر^۲ = ب^۲ ± ا^۲ ....(۱۸)

اسلئے ا^۲ ب^۲ / ع^۲ = ب^۲ ± ا^۲ ∓ ر^۲ ....(۱۹)

قائم قطع زائد کی خاص صورت میں ع ر = ا^۲ ....(۲۰) کیونکہ ب ما = ر

یہی نتیجہ اوپر (۱۵) میں ن = -۲ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵ ۔ اس کے بعد ایک ماسک کو قطب مانکر دوسرے ماسک کے لحاظ سے عمود اور سمتی نیم قطر کو بالترتیب عَ اور رَ سے تعبیر کرو۔ چونکہ مماس دو ماسکی نیم قطروں سے مساوی زاویے بناتا ہے اسلئے

ع/ر = عَ/رَ اور اس لئے ع^۲/ر = ع عَ / ر رَ

اب $\text{ع}\,\text{ع}' = \text{ب}^2$ اور قطع ناقص میں $\text{ر} + \text{ر}' = ۲\text{ا}$، اس لئے قطع ناقص کے لئے $\frac{\text{ع}^2}{\text{ر}} = \frac{\text{ب}^2}{۲\text{ا} - \text{ر}}$ یا اگر نیم وتر خاص $\left(\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}\right)$ کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو

$$\frac{\text{ل}}{\text{ع}^2} = \frac{۲}{\text{ر}} - \frac{۱}{\text{ا}} \qquad \text{(۲۱)}$$

قطع زائد میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ع}^2} = \pm\frac{۲}{\text{ر}} + \frac{۱}{\text{ا}} \qquad \text{(۲۲)}$$

اوپر کی علامت اُس شاخ سے متعلق ہے جو مبدأ کے پاس ہے اور نیچے کی دور کی شاخ سے۔

مثال ۶۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے لئے $\text{ع} = \frac{\text{ر}^3}{\text{ا}^2}$ .... (۳)

(۶) میں درج کرنے اور تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{طہ} - \text{عہ} = \int \frac{\text{ر}\,\text{دِر}}{\sqrt{\text{ا}^4 - \text{ر}^4}} = \frac{۱}{۲}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ر}^2}{\text{ا}^2}$$

یا $\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جب}\,۲(\text{طہ} - \text{عہ})$ .... (۲۴)

جو چشمہ منحنی ہے۔

۱۳۰۔ مربوط منحنی۔ تقلیب۔ کئی ہندسی نظریے ہیں جن میں ایک منحنی ایک اور منحنی کے ساتھ ایک خاص رشتہ کے ذریعہ متعلق ہوتا ہے۔ اس کی سادہ مثال تقلیب (Inversion) کی ہے۔ اگر ایک ثابت مبدأ و سے کسی معلوم منحنی کا سمتی نیم قطر وپ کھینچا جائے اور وپ پر ایک نقطہ پ' ایسا لیا جائے کہ

$$\text{وپ} \times \text{وپ}' = \text{م}^2 \qquad \text{(۱)}$$

جہاں م ایک دیا ہوا مستقل ہے تو پ' کے طریق کو ہم پ کے طریق کا معکوس کہیں گے۔ مبدأ و کو مرکز کہا جاتا ہے اور م^2 کو تقلیب کا "مستقل"

شکل (۹۹)

۲۱۴ کوئی منحنی اور اس کا مقلوب، سمتی نیم قطر کے ساتھ مکمل زاوئے بناتے ہیں۔
کیونکہ اگر پ اور ق کسی منحنی کے متصل نقطے ہوں اور پَ، قَ مقلوب منحنی کے متناظر نقطے ہوں تو وپ × وپَ = وق × وقَ اور اسلئے

وپ : وق = وقَ : وپَ .... (۲)

اِس لئے مثلث پ وق اور قَ وپَ باہم متشابہ ہیں اور زاویوں وپ ق اور وپَ قَ کا مجموعہ دو قائمہ ہے، انتہا میں جب ق، پ کے لاانتہا قریب ہو تو یہ زاوئے وہ ہونگے جو مختلف مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتے ہیں۔

ہندسہ کی ابتدائی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے سوائے اِس خاص صورت کے جبکہ تقلیب کا مرکز محیط پر ہو اور اِس صورت میں ایک خط مستقیم ہے۔

کئی ترکیبوں سے ایک دئے ہوئے منحنی کا مقلوب آلی طریق سے مرتسم ہو سکتا ہے۔

(۱) پوسیلئے (Peaucellier) کا رابطہ۔

اِس میں چار سلاخوں کا ایک معین پ ا ق ب ہوتا ہے جس میں سلاخوں کے سرے چولوں کے ذریعہ آزادانہ طور پر وصل کئے ہوئے ہیں نیز اسمیں اور دو مساوی سلاخیں ہوتی ہیں جو متقابل کے کونوں ا، ب کو و پر کی ایک ثابت چول کے ساتھ ملاتی ہیں۔

ظاہر ہے کہ رابطہ خواہ کوئی شکل یا وضع اختیار کرے نقاط پ، ق ہمیشہ و میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے۔ اگر معین کے

وتروں کا نقطہ تقاطع ن ہو تو

وپ × وق = ون۲ ـ پ ن۲ = وا۲ ـ ا پ۲ = مستقل ۔۔۔ (۱)

شکل (۱۰۰)

اسلئے اگر پ (یا ق) سے کوئی ایک منحنی مرتسم کرایا جائے تو ق (یا پ) بلحاظ نقطہ و کے مقلوب منحنی مرتسم کریگا۔

خاص طور پر اگر پ کو ایک ثابت چول س کے ساتھ کڑی کے ذریعہ منسلک کر دیا جائے اور س و = س پ تو پ کا طریق نقطہ و میں سے ایک دائرہ ہوگا اور اس لئے ق کا طریق و س پر علی القوائم ایک خط مستقیم ہوگا۔

اِس سے اوس ضروری جبلی مسئلہ کا صحیح حل حاصل ہوتا ہے کہ دائری حرکت کو حرکت مستقیم میں رابطہ کاری کے ذریعہ کس طرح تبدیل کیا جائے۔

۲۱۵

شکل (۱۰۱)

(۲) ہارٹ (Hart) کا رابطہ۔

اِس میں ایک "چلیپی" متوازی الاضلاع اب ج د ہوتا ہے جو چار سلاخوں کے سروں کو چولوں کے ذریعہ جوڑنے سے حاصل ہوتا ہے اور اِس کے متبادل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰، صفحہ ۴۳۳۔

نقطہ و کو ایک ضلع اب میں ایک ثابت چول قرار دیا جاتا ہے اور نقاط پ، ق بالترتیب اضلاع اد اور ب ج میں نقاط ہیں ایسے کہ

اپ : پ د = ج ق : ق ب = او : و ب = م : ن (فرض کرو)۔

صریحاً و، پ، ق ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو اج اور ب د کے متوازی ہے۔

اگر ا اور ج کے قائم ظل ب د پر ل اور ک ہوں اور ن، ب د کا نقطہ وسطی ہو تو اج × ب د = ۲ ن ل × ۲ ن ب = دل۲ - ب ل۲

= اد۲ - اب۲

اب وپ : ب د = او : اب = م : م + ن

وق : اج = ب و : اب = ن : م + ن

اِس لئے وپ × وق = $\frac{\text{م ن}}{(\text{م} + \text{ن})^2}$ (اد۲ - اب۲) = مستقل ......(۲)

اسلئے پ اور ق بلحاظ و کے مقلوب منحنی مرتسم کرتے ہیں۔

پہلے کیطرح اگر پ کو کڑی پ س کے ذریعہ جو س و کے مساوی ہے ایک ثابت چول س کے ساتھ منسلک کردیا جائے تو دائری حرکت خط مستقیم میں تبدیل ہوسکے گی۔

۱۳۱- پائیں منحنی، مکافی قطبی۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے منحنی کے کسی مماس پر عمود و سے کھینچا جائے تو اِس عمود کے پایہ سے کے طریق کو بلحاظ مبدا و کے اصلی منحنی کا "پائیں منحنی" کہتے ہیں۔

مثلاً مکافی کا پائیں منحنی بلحاظ ماسکہ کے رأس پر کا مماس ہے قطع ناقص

یا زائد کا پائین منحنی بلحاظ کسی ماسکہ کے "معاون دائرہ" ہے۔
اگر و ے = ع اور سا وہ زاویہ ہو جو و ے کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ بناتا ہے تو ے کے قطبی محدد ع، سا خیال کئے جا سکتے ہیں جبکہ و قطب ہو۔ اس لئے اگر ع اور سا کے درمیان رشتہ معلوم ہو سکے تو پائین منحنی کی قطبی مساوات فوراً لکھی جا سکتی ہے۔
کسی منحنی اور اس کے پائین کے متناظر نقاط پر سمتی نیم قطر مماسوں کے ساتھ جو زاویے بناتے ہیں وہ باہم مساوی ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ و سے دو متصل مماسوں پ ے، پ ےَ پر عمود و ے، و ےَ ہیں اور ے ےَ ممدودہ پر عمود و ع ہے۔ و پ کے قطر پر جو دائرہ بنایا جائے نقاط ے، ےَ اس پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے چار ضلعی و ے ےَ پ کا خارجی زاویہ و ے ع مقابل کے داخلی زاویہ و پ ےَ کے مساوی ہے۔ لیکن انتہا میں یہ وہ زاویے ہیں جو و ے اور و پ بالترتیب پائین منحنی کے مماس اور اصلی منحنی کے مماس کے ساتھ بناتے ہیں۔

شکل (۱۰۲)

نیز، متشابہ مثلثوں سے

و ع : و ے = و ےَ : و پ ...... (۱)

اسلئے اگر اصلی منحنی کا سمتی نیم قطر ر ہو اور ع عمود ہو و سے مماس پر

اور ع عمود ہو و سے پائیں کے مماس پر تو بالآخر

$$\frac{ع'}{ع} = \frac{ع}{ر} \quad \text{یا} \quad ع = \frac{ع'^{2}}{ر} \qquad \text{(۲)}$$

نیز اگر وےَ، پ ے سے ن پر ملے تو ہم لکھ سکتے

وے = ع، وےَ = ع + مف ع، ےےَ = وےَ - وے، پ ےَ = مف سا

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے قطع نظر کرنے سے

مف ع = ن ےَ = پ ے مف سا

اسلئے انتہا لینے سے، جبکہ پ ےَ، پ ے پر منطبق ہو ہمیں منحنی کے مماس پر سمتی نیم قطر کے ظل کے لئے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{پ ے} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} \qquad \text{(۳)}$$

اس نتیجہ کی مدد سے "منفی پائیں منحنیوں" کا سوال حل ہو جاتا ہے یعنی اسکی مدد سے وہ منحنی مل جاتا ہے جس کا پائیں کوئی دیا ہوا منحنی ہو۔ اگر و کو مبدأ اور سا کے ابتدائی خط کو محور لا مانا جائے تو نقطہ تماس پ کے محدد ہیں ۳۱۷

لا = وے جم سا - ے پ جب سا

ما = وے جب سا + ے پ جم سا

$$\text{یا}\quad \left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ع جم سا} - \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}\,\text{جب سا} \\ \text{ما} &= \text{ع جب سا} + \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}\,\text{جم سا} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(۴)}$$

مثال ۱۔ اگر مخروطی

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} \pm \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱ \qquad \text{(۵)}$$

کے مرکز پر مبدأ ہو اور سا وہ زاویہ جو ع، لا کے ساتھ بناتا ہے تو مخروطی تراشوں کی کتابوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

$$\text{ع}^{2} = \text{ا}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{سا} \pm \text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{سا} \qquad \text{(۶)}$$

اس لئے پائیں منحنی کی قطبی مساوات ہے

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ} \pm \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots (۷)$$

قائم زائد $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ .... (۸)

کی صورت میں پائیں منحنی ہے $\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}\,۲\,\text{طہ}$ .... (۹)

مثال ۲۔ نیم قطر ا کے دائرے میں ما جہاں قطب و مرکز ج سے فاصلہ ج پر واقع ہو اگر خط و ج کو سا کا مبدا مانا جائے تو شکل سے ظاہر ہے کہ

$$\text{ع} = \text{ا} + \text{ج}\,\text{جم}\,\text{سا} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اسلئے پائیں منحنی گھونگا منحنی ہے

$$\text{ر} = \text{ا} + \text{ج}\,\text{جم}\,\text{طہ} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

اگر و محیط پر ہو جس صورت میں ج = ا تو پائیں منحنی خط صنوبری ہوگا

$$\text{ر} = \text{ا}\,(۱ + \text{جم}\,\text{طہ}) \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

مثال ۳۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کا پائیں صنوبری

$$\text{ر} = \text{ا}\,(۱ + \text{جم}\,\text{طہ}) \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

ہے۔ اِس مساوات کو اِس طرح لکھنے سے

$$\text{ع} = \text{ا}\,(۱ + \text{جم}\,\text{سا}) \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ا}\,\text{جم}\,\text{سا} + \text{ا}\,،\quad \text{ما} = \text{ا}\,\text{جب}\,\text{سا}$$

جس سے $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ .... (۱۵)

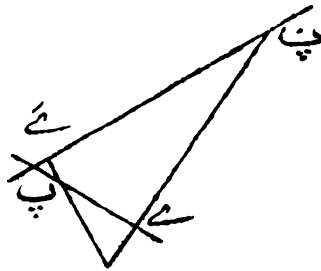
جو مبدا میں سے گذرنے والا ایک دائرہ ہے۔

کسی منحنی ح کے مماس کے قطب کا طریق بلحاظ ایک ثابت مخروطی کے "متکافی قطبی" کہلاتا ہے۔ مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ح کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ح′ ہو تو ح′ کے مماسوں کے قطبوں کا طریق ح ہوگا۔ "متکافی" کے استعمال کی یہی وجہ ہے۔ ۳۱۸

ہم اس صورت کا یہاں محض سرسری ذکر کرینگے جبکہ ثابت مخروطی دائرہ ہو۔ اگر اس دائرہ کا مرکز و ہو اور نیم قطر م تو منحنی ح کے کسی مماس کا قطب پ

اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اس مماس پر و سے عمود نکالا جائے اور و ے پر ایک نقطہ پ ایسا لیا جائے کہ

و ے × و پ = م² .... (۱۶)

اس لئے اس صورت میں 'متکافی قطبی' بلحاظ نقطہ و کے دئے ہوئے منحنی کے پائیں کا مقلوب ہے۔

شکل (۱۰۴)

اوپر کی متکافی خاصیت کی رو سے، اصلی منحنی کو پ کے طریق کے پائیں کا مقلوب ہونا چاہئے۔ اسکی بآسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔ کیونکہ اگر پ اصلی منحنی کے ساتھ مماس کا نقطۂ تماس ہو اور اگر و پ، پ کے طریق کے مماس کو ےَ پر ملے تو زاویہ
و پ ےَ اور و پ ے مساوی ہونگے۔ اس لئے و ےَ پ
زاویہ قائمہ ہے اور ےَ، پ کے پائیں منحنی کو مرتسم کرتا ہے۔ اور چونکہ
پ ے پ ےَ ہم محیط چار ضلعی ہے اس لئے

و پ × و ےَ = و ے × و پ = م² .... (۱۷)

اس لئے پ، ےَ کے طریق کا مقلوب مرتسم کرتا ہے۔

مثال ۴۔ دائرہ کا قطبی متکافی بلحاظ کسی مبدأ کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا مبدأ اسکا ہے۔

مثال ۲ کی مانند دائرہ کے پائیں منحنی کا ضابطہ ہے

ع = ا + ج جم سا .... (۱۸)

سا کی بجائے طہ اور ع کے لئے $\frac{م^2}{ر}$ لکھنے سے ہمیں قطبی مکانی کی مساوات اس شکل میں حاصل ہوتی ہے

$$\frac{م^2}{ر} = ۱ + ج \text{ جم } طہ \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

جو ایک مخروطی تراش ہے، جس کا ماسکہ مبدا پہ ہے اور جس کا خروج المرکز $\frac{ج}{۲}$ ہے۔ اس لئے مخروطی قطع ناقص، مکافی یا زائد ہے بموجب اس کے کہ مبدأ دائرہ کے اندر، اوپر یا باہر ہے۔

۳۱۹

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{لا^2}{ا^2} \pm \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad \ldots\ldots (۲۰)$

کا پائین منحنی بلحاظ مبدأ کے یہ ہے

$$ع^2 = ا^2 \text{ جم}^2 \text{ سا} \pm ب^2 \text{ جب}^2 \text{ سا} \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

اس سے قطبی مکانی ہے

$$\frac{م^2}{ر^2} = ا^2 \text{ جم}^2 طہ \pm ب^2 \text{ جب}^2 طہ \quad \ldots\ldots (۲۲)$$

یا

$$ا^2 لا^2 \pm ب^2 ما^2 = م^4 \quad \ldots\ldots (۲۳)$$

جو ایک ہم مرکز مخروطی تراش ہے۔

۱۳۲۔ **دو قطبی مجدد۔** اگر کسی منحنی پر کوئی نقطہ پ ہو اور دو ثابت نقطوں یا ماسکوں س، سَ سے اس نقطہ کے فاصلے (ر، رَ) ہوں تو ان فاصلوں کے درمیان جو اس منحنی کے لئے رشتہ ہے اس کے ذریعہ اس منحنی کی تعریف ہوسکتی ہے۔ مثلاً

$$ف (ر، رَ) = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

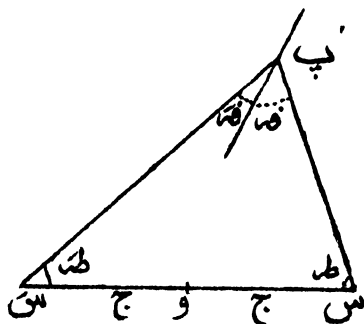
اگر زاویوں پ س سَ، پ سَ س کو بالترتیب طہ، طہَ سے تعبیر کیا جائے اور جو زاوئے نیم قطر ر، رَ مماس کے ساتھ بناتے ہیں وہ فہ، فہَ ہوں تو دفعہ ۱۱۲ کی مانند

فرر / فرس = جم فہ ، فرر َ / فرس = جم فہَ
رفرطہ / فرس = جب فہ ، رَفرطہَ / فرس = جب فہَ .... (۲)

علاوہ ماتکے ذیل کے رشتے ہیں
رجب طہ = رَجب طہَ ، رجم طہ + رَجم طہَ = ۲ج ..... (۳)
جہاں ج = ½ س سَ

شکل (۱۰۴)

۳۴۰ مثال ۱ ۔ ناقص میں ر + رَ = ۲ ا .... (۴)

اس لئے فرر / فرس + فررَ / فرس = یعنی جم فہ + جم فہَ = یا فہَ = π - فہ ..(۵)

اس لئے ماتکی فاصلے منحنی کے ساتھ مکمل زاوے بناتے ہیں ۔

اسی طرح سے قطع زائد میں ر ــ رَ = ۲ ا .... (۶)

جم فہ = جم فہَ .... (۷)

یعنی ماتکی فاصلے منحنی کے ساتھ متقابل جانبوں میں مساوی زاوے بناتے ہیں ۔
مثال ۲ ۔ ایک انعکاسی یا انعطافی سطح کی شکل دریافت کرو کہ تمام ایسی شعاعیں جو ایک ثابت نقطہ س میں سے گذرتی ہیں اور اس پر گرتی ہیں انعکاس اور انعطاف

کے بعد بھی ایک ثابت نقطہ سؔ میں سے گذریں۔

انعکاس کی صورت مثال (۱) کا عکس ہوگی سطح ایسی ہونا چاہئیے جو ناقص یا زائد کو، ماسکوں (س، سؔ) کے ملانے والے خط کے گرد پھرانے سے حاصل ہو

انعطاف کی صورت میں اگر دو واسطوں کے انعطاف نما مہا اور مہاؔ ہوں

تو مہا جب صہر = مہاؔ جب صہرؔ .... (۸)

جہاں صہر = ± (π/۲ - فہا)، صہرؔ = ± (π/۲ - فہاؔ) ..... (۹)

اس لئے مہا جم فہا ± مہاؔ جم فہاؔ = ... (۱۰)

یا $\frac{\text{ف}}{\text{فس}}$ (مہا ر ± مہاؔ رؔ) = ... (۱۱)

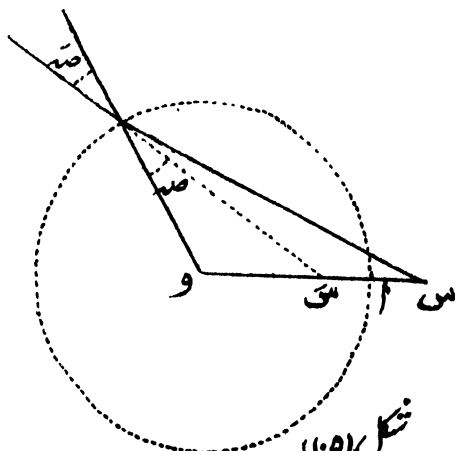
تکمل سے مہا ر ± مہاؔ رؔ = مستقل .... (۱۲)

ایسے منحنیات جن میں دو نیم قطروں کے معلومہ ضعفوں کا مجموعہ (یا فرق) مستقل ہو کارٹیزی بیضہ کہلاتے ہیں کیونکہ ڈی کارٹ نے ہی ابتدا میں علم مناظر کے اس مسئلہ پر بحث کی۔ جب (۱۲) میں نچلی علامت لیجاتی ہے تو اس قبیل کے اندر دائرہ

$$\frac{\text{ر}}{\text{رؔ}} = \frac{\text{مہا}}{\text{مہاؔ}} \quad \text{............... (۱۳)}$$

شامل ہوجاتا ہے دیکھو شکل ۱۰۵۔

۳۲۱

شکل (۱۰۵)

مثال ۳۔ کیسینی (Cassini) کے بیضوی منحنیات کی یہ تعریف ہے۔

$$ر\,رَ = م^2 \quad \cdots\cdots (۱۴)$$

جہاں م مستقل ہے۔ چونکہ ایک ایسے نقطہ پ کے لئے جو خط س سَ پر نقاط س، سَ کے درمیان واقع ہو ر رَ کی بڑی سے بڑی قیمت $ج^2$ ہے اس لئے منحنی دو الگ الگ بیضوں پر مشتمل ہوگا جو بالترتیب س، سَ کے گرد بنے ہونگے اگر $م < ج$ اور صرف ایک بیضہ پر مشتمل ہوگا جو دونوں نقاط کو گھیرے ہوئے ہوگا جبکہ $م > ج$۔

اس خاص صورت میں جبکہ $م = ج$، منحنی کی عینک جیسی شکل ہوگی۔ اسے ہم برنولی کا چشمہ منحنی (Lemniscate.) کہینگے۔ یہ منحنی متعدد مسائل ریاضی میں آتا ہے۔ اگر س سَ کے وسطی نقطہ و کو قطب مانا جائے اور و س کو ابتدائی خط اور ان کے لحاظ سے محددوں کا ایک نظام $(ر_1، طہ_1)$ ہو تو

$$ر^2 = ر_1^2 + ج^2 - ۲ ج ر_1 جم طہ_1 ، \quad رَ^2 = ر_1^2 + ج^2 + ۲ ج ر_1 جم طہ_1$$

اس لئے چشمہ منحنی کی مساوات ہے

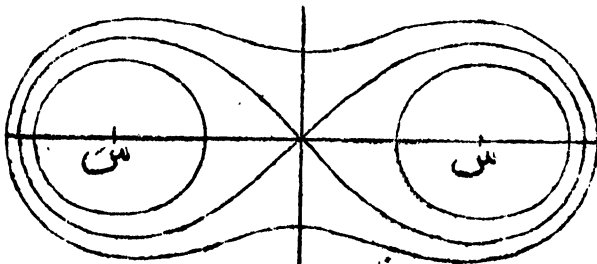
$$(ر_1^2 + ج^2)^2 - ۴ ج^2 ر_1^2 جم^2 طہ_1 = ج^4$$

جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے

$$ر_1^2 = ۲ ج^2 جم ۲ طہ_1 \quad \cdots\cdots (۱۵)$$

مقابلہ کر دفعہ ۱۲۸ کے ساتھ۔

شکل (۱۰۶)

۳۲۲

مثال ۴۔ مقناطیسی منحنی۔ اگر س، سَ ایک مقناطیس کے شمالی اور جنوبی قطب ہوں تو کسی نقطہ پ پر قوتیں ہونگی $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{2}}$ سمت س پ میں اور $\frac{\text{مہ}}{\text{رَ}^{2}}$ سمت پ سَ میں۔ "قوت کا خط" ایسا خط ہے جو نقطہ بہ نقطہ حاصل قوت کی سمت میں کھینچا جائے۔ اِس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی عمود وار سمت میں صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{2}}\,\text{جب فہ} + \frac{\text{مہ}}{\text{رَ}^{2}}\,\text{جب فہَ} = 0$$

یا
$$\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}} + \frac{1}{\text{رَ}}\,\frac{\text{فرطہَ}}{\text{فرس}} = 0 \quad \cdots\cdots (16)$$

اب چونکہ ر جب طہ = رَ جب طہَ اِس لئے

$$\text{جب طہ}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}} + \text{جب طہَ}\,\frac{\text{فرطہَ}}{\text{فرس}} = 0$$

یا
$$\text{جم طہ} + \text{جم طہَ} = \text{مستقل} \quad \cdots\cdots (17)$$

"مساوی قوہ کا خط" وہ ہے کہ ایک مقناطیسی قطب پر جو اسے مرتسم کرے کوئی کام نہ ہو۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اِس خط کی سمت میں صفر ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{2}}\,\text{جم فہ} - \frac{\text{مہ}}{\text{رَ}^{2}}\,\text{جم فہَ} = 0$$

یا
$$\frac{1}{\text{ر}^{2}}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} - \frac{1}{\text{رَ}^{2}}\,\frac{\text{فررَ}}{\text{فرس}} = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

جس سے
$$\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{رَ}} = \text{مستقل} \quad \cdots\cdots (19)$$

مساوی قوہ کے خط لازماً قوت کے خطوط پر علی التوائم ہونگے۔

امثلہ ۴۲

جبریہ منحنی

۱- ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{لا}(۱-\text{لا})$، $\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱$

۲- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۲}(\text{ا}-\text{لا})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکے حلقہ کا رقبہ $\frac{۸}{۱۵}\text{ا}^{۲}$ ہے۔ یہ معلوم کرو کہ حلقہ کا عرض کہاں بڑے سے بڑا ہے۔ $[\text{لا} = \frac{۲}{۳}\text{ا}]$

۳- منحنی $\text{ا}^{۲}\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۲}(\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اِس کے دو حلقے ہیں اور ہر ایک کا رقبہ $\frac{۲}{۳}\text{ا}^{۲}$ ہے۔

۳۲۴

۴- منحنیات $\text{ما}^{۲} = \text{لا}(\text{لا}^{۲}-۱)$، $\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}(۱-\text{لا})$ کو مرتسم کرو۔

۵- منحنی $\text{ا}^{۴}\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۴}(\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اِس کا رقبہ $\frac{۱}{۴}\pi\,\text{ا}^{۲}$ ہے۔

۶- منحنی $\text{ا}^{۲}\text{ما}^{۴} = \text{لا}^{۴}(\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکا رقبہ $\frac{۸}{۵}\text{ا}^{۲}$ ہے۔

۷- ثابت کرو کہ منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ (شکل ۷۰) کی قوس کا طول، رأس سے اِس نقطہ تک جس کا فصلہ لا ہے، یہ ہے $\frac{۱}{۲۷\sqrt{\text{ا}}}(۹\,\text{لا}+۴\,\text{ا})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۸}{۲۷}\text{ا}$

۸- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ اور خط $\text{لا} = \text{ھ}$ کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسکا اوسط مرکز $(\frac{۵}{۷}\text{ھ}، ۰)$ ہے۔

۹- منحنی $\text{ا}\,\text{ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ محور لا کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ وہ حجم جو سطح مکونہ اور محور پر عمود دار ایک مستوی کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اُس مستدیر اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا طول اور دائری قاعدہ دونوں وہی ہیں جو سطح مقطوعہ کے ہیں۔

۱۰- اِن منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما}^{۲} = \frac{۱}{\text{لا}}$، $\text{ما}^{۲} = \frac{۱}{\text{لا}(۱-\text{لا})}$

۱۱- رقبہ جو منحنی $\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} = \frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{لا}}$ (شکل ۷۲) اور اِس کے متقارب کے درمیان

گھرا ہوا ہے وہ ۲ ٹ ا^2 ہے ۔

اگر یہی منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{2}$ ٹ^2 ا^3 ہوگا

۱۲- ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2 - 1}{\text{لا}}$

۱۳- ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{لا}^2}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^2 - 1}{\text{لا}^2}$

۱۴- ان منحنیات کو مرتسم کرو $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + 1}$ ، $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}^2}$

اعظم اور اقل معین (اگر کوئی ہوں) اور نقاط انعطاف دریافت کرو ۔

۳۲۴

۱۵- منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^3}{\text{ا} - \text{لا}}$ (شکل ۴۰) اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $\frac{3}{4}$ ٹ ا^2 ہے ۔ اگر یہ منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم $\frac{1}{4}$ ٹ^2 ا^3 ہوگا ۔

۱۶- منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{ا}^2 \text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اسکی دو شاخوں اور کسی ایک متقارب کے درمیان ۲ ا^2 ہے ۔

۱۷- ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ا} - \text{لا}}$ (شکل ۳۰) اور اس کے متقارب کے درمیان کا رقبہ $\frac{1}{2}$ (ٹ + ۴) ا^2 ہے ۔

۱۸- منحنی $\text{ما}^2 = \frac{\text{لا}^4}{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ منحنی اور کسی ایک متقارب کے درمیان رقبہ $\frac{1}{2}$ ٹ ا^2 ہے ۔

۱۹- منحنی $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 \frac{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے حلقہ کا رقبہ $\frac{1}{2}$ (ٹ − ۲) ا^2 ہے ۔

۲۰ — منحنی $\text{ما}^{2} = \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ر}^{2}}(2\text{ر} - \text{لا})(\text{لا} - \text{ر})$ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ رقبہ $\frac{3}{8}\pi\,\text{ر}^{2}$ گھیرتا ہے۔

۲۱ — منحنی $\text{ما}^{2} = \frac{\text{لا}}{\text{ل}}(\text{لا} - \text{ب})^{2} + \text{ج}^{2}$ کو مرتسم کرو۔

۲۲ — منحنی $\text{لا} = \text{ت} - \text{ت}^{3}$، $\text{ما} = 1 - \text{ت}^{4}$ کو ت کی حقیقی قیمتوں کے لئے مرتسم کرو۔ اور ثابت کرو کہ یہ ایک حلقہ پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ $\frac{16}{35}$ ہے۔

امثلہ ۵۳

۳۲۵

(زنجیرہ، خط تدویر وغیرہ)

۱ — ثابت کرو کہ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں $\text{س}^{2} = \text{ما}^{2} - \text{ج}^{2}$

۲ — ثابت کرو کہ زنجیرہ وہی ایک منحنی ہے جس میں معین کے پایہ سے مماس پر عمود مستقل طول کا ہوتا ہے۔

۳ — ایک ہی اونچائی پر دو معلومہ نقطے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام زنجیرہ خطوط میں سے، جو ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں اور جن کے محور انتصابی ہیں ایک زنجیرہ ایسا ہے جس میں ان نقاط کے نیچے مرتب کی گہرائی کم سے کم ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اس زنجیرہ میں مذکورہ نقطوں پر کے مماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

اگر ان نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ب ہو تو مرتب کی گہرائی ب جمز ع ہے، منحنی کی قوس $\frac{\text{ب جمز ع}}{\text{ع}}$ ہے اور دئے ہوئے نقاط پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ $\text{جم}^{-1}(\text{قطز ع})$ ہے جہاں ع مساوات ع مسز ع = ا کی مثبت اصل ہے۔

۴ — خط جرّی (Tractrix) کے کسی نقطہ کے محدد اِن شکلوں میں بیان ہو سکتے ہیں لا = ا (ع - مسن ع)، ما = ا قطن ع
جہاں ع متغیر متبدل (parameter.) ہے۔

۵ — ثابت کرو کہ خط جرّی میں ما = ا قو $^{س/ا}$
جہاں قوس س قرن سے ناپی گئی ہے۔

۶ — اُس مجسم کا حجم جو خط جرّی کو اس کے متقارب کے گرد گھمانے سے پیدا ہو $\frac{۲}{۳}$ ط ا^{۳} ہے۔
اسی مجسم کی سطح ۴ ط ا^{۲} ہے۔

۷ — اگر ایک متحرک نقطہ کے محدد لا = ا جمزن ن ت، ما = ب جنزن ت ہوں جہاں ت وقت ہے تو اس کا راستہ قطع زائد ہوگا اور اس کی رفتار مزدوج نیم قطر کے طول کے متناسب ہوگی جو مزدوج زائد کے ساتھ اسکے تقاطع تک ناپا گیا ہے۔
نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے۔

۸ — لیسازو کے منحنی لا = ا جب ۲ (ن ت - صہ)، ما = ب جم ن ت کے کسی حلقہ کا رقبہ $\frac{۴}{۳}$ ا ب جم ۲ صہ ہے۔

۹ — ثابت کرو کہ لیسازو کا منحنی لا = ا جم ن ت، ما = ب جم ۳ ن ت ۳۴۱
منحنی $\frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ا}\left(۴\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - ۳\right)$ کے کچھ حصہ پر مشتمل ہے۔ اِس منحنی کو مرتسم کرو۔

۱۰ — اگر خط تدویر میں لڑھکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرتسم نقطہ پ کی رفتار عماد سے پ (شکل ۱) کے متناسب ہوگی۔

۱۱ — خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد گردش دینے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا حجم ۵ ط^{۲} ا^{۳} ہے جہاں مکون دائرہ کا نیم قطر ا ہے۔
اسی مجسم کی سطح $\frac{۶۴}{۳}$ ط ا^{۲} ہے۔

۱۲ — خط تدویر کا وہ حصہ جو دو متواتر قرنوں کے درمیان ہے راس پر کے مماس کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مکونہ کا رقبہ $\frac{۳۲}{۳}$ ط ا^{۲} ہے۔

نیز ثابت کرو کہ مذکورہ بالا سطح اور اُن دائروں کے مُستویوں کے درمیان جنھیں قرن پیدا کرتے ہیں گھرا ہوا حجم π^2 ا³ ہے۔

۱۳۔ خط تدویر اپنے محور کے گرد گھومنے سے جو حجم پیدا کرتا ہے وہ ہے
$\frac{1}{4}(9\pi^2-16)\,\pi$ ا³ ۔

۱۴۔ اسی مجسم کی سطح $\frac{8}{3}(3\pi-4)\,\pi$ ا² ہے۔

۱۵۔ ایک قرن سے دوسرے قرن تک جو خط تدویر کی قوس ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے $\frac{4}{3}$ا فاصلہ پر ہے۔

۱۶۔ خط تدویر اور اسکے قاعدہ کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ سے فاصلہ $\frac{5}{6}$ا پر ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ منحنی لا$^{\frac{2}{3}}$ + ما$^{\frac{2}{3}}$ = ا$^{\frac{2}{3}}$ میں کسی نقطہ پر کا مماس محددوں کے محوروں پر جو مقطوعے کاٹتا ہے وہ بالترتیب ا$^{\frac{2}{3}}$ لا$^{\frac{1}{3}}$ اور ا$^{\frac{2}{3}}$ ما$^{\frac{1}{3}}$ ہیں۔

اس طرح اس کی تصدیق کرو کہ محوروں کے درمیان مماس کا طول مستقل ہے۔

۱۸۔ مساواتوں لا = ا جم³ طہ، ما = ا جب³ طہ سے ثابت کرو کہ ستارہ نما (Astroid) میں $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$ = ۳ا جب طہ جم طہ اور اسلئے منحنی کا کل طول ۶ا ہے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ ستارہ نما کا کل رقبہ $\frac{3}{8}\pi$ ا² ہے۔

۲۰۔ دو مقابل کے قرنوں کو ملانے والے خط کے گرد ستارہ نما کو گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم $\frac{32}{105}\pi$ ا³ ہے۔

۴۴۷

۲۱۔ منحنی لا = ا جم³ طہ، ما = ب جب³ طہ کے ربع کا طول $\frac{\text{ا}^2+\text{اب}+\text{ب}^2}{\text{ا}+\text{ب}}$ اور رقبہ جو یہ منحنی گھیرتا ہے وہ $\frac{3}{8}\pi$ ا ب ہے۔

۲۲۔ ن، قرنوں والے بر یا در تدویر کا کل محیط $\frac{8(\text{ن}\pm 1)}{\text{ن}}$ ا ہے جہاں ا

ثابت دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۳۔　اُس منحنی کا خاکہ کھینچو جو دو یکساں دائری حرکتوں کو ترکیب دینے سے پیدا ہو جبکہ دائروں کے نیم قطر مساوی ہوں لیکن دَور ذرا مختلف ہوں (١) جبکہ گھماؤ ایک ہی سمت میں ہوں اور (٢) جبکہ گھماؤ مقابل سمتوں میں ہوں۔

۲۴۔　ثابت کرو کہ ہر دوریہ میں مماس مرکزیں سے نہیں گزر سکتا جبتک کہ

ن ج > نَ جَ جہاں دو مقداروں ج ، جَ میں سے ج بڑا ہے (دفعہ ۱۲۵)

۲۵۔　ثابت کرو کہ استداری ا١ = ا طہ + ک جب طہ ، ٥١ = ا - ک جم طہ ، ی١ دوری سوج کا طول ایک قطع ناقص کے محیط کے مساوی ہے جس کے نیم محور ا + ک اور ا - ک ہیں۔

امثلہ ۴۴

قطبی محدد

١۔　ثابت کرو کہ ایک ہی زاویہ والے تمام مساوی الزاویہ لولبی متماثلاً مساوی ہوتے ہیں۔

٢۔　زاویہ عہ والے مساوی الزاویہ لولبی میں سمتی نیم قطر (ل) جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے $\frac{1}{4}$ (ل٢² - ل١²) سس عہ جہاں ل١ ، ل٢ اطراف میں ل کی قیمتیں ہیں۔

۳۔　ثابت کرو کہ ارشمیدس کے لولب میں زاویہ (فہ) جو مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان بنتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم فہ} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{\text{ر}^2 + \text{ا}^2}}$$

۴۔　ثابت کرو کہ متکافی لولب میں نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے اس کا اضافہ نیم قطر کے متناسب ہے۔

۵۔　ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گزرنے والے تمام وتر ایک ہی طول کے

ہوتے ہیں ۔ کیا یہی بات درست ہے گھونگا منحنی کے لئے ۔

۶ ۔ خط صنوبری ر = ا (۱ + جم طہ) کا رقبہ $\frac{۳}{۲}$ ۲ ا^۲ ہے ۔

۷ ۔ منحنی ر = ا + ۲ ا جم طہ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اندرونی حلقہ کا رقبہ ۵۴۳۵ء ا^۲ ہے ۔

۸ ۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری میں $\frac{فرس}{فرطہ}$ = ۲ ا جم $\frac{طہ}{۲}$ اور اس طرح دکھاؤ کہ کل محیط ۸ ا ہے ۔

۹ ۔ خط صنوبری کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{۸}{۳}$ ۲ ا^۳ ہے

۱۰ ۔ خط صنوبری میں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا عرض (محور پر عمود وار) $\frac{۳}{۲}$ $\sqrt{۳}$ ا ہے اور دوہرا مماس محور کو قطب سے فاصلہ $\frac{ا}{۴}$ پر ملتا ہے ۔

۱۱ ۔ گھونگا منحنی ر = ا جم طہ + ج میں اعظم معین اور اقل فصلہ معلوم کرو

۱۲ ۔ گھونگا منحنی ر = ا جم طہ + ج کا رقبہ جبکہ ج > ا ہے ۲ (ج^۲ + $\frac{ا^۲}{۲}$)

۱۳ ۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ اگر دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کریں اور ایک دوسرے کے ساتھ مستقل زاویہ بنائیں تو انکے تقاطع کا طریق گھونگا منحنی ہے

۱۴ ۔ کل رقبہ چشمہ منحنی ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کا ا^۲ ہے ۔

۱۵ ۔ نیز اس منحنی کے ہر حلقہ کا محیط ہے ۲ ا $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{فرطہ}{\sqrt{۱ - ۲ جب^۲ طہ}}$ ۔

ثابت کرو کہ ناقصی تکملون (دفعہ ۱۱۱) کی ترتیم میں یہ تکملہ مساوی ہے $\sqrt{۲}$ ا ن، ($\frac{۱}{\sqrt{۲}}$) کے ۔

۱۶ ۔ چشمہ منحنی کے کسی حلقہ کے رقبہ کا اوسط مرکز قطب سے فاصلہ $\frac{۱}{۸}$ $\sqrt{۲}$ ۲ ا پر ہے ۔ ۳۲۹

۱۷ ۔ بردوریہ ر = ا جب ۳ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ ہے $\frac{۲ ا^۲}{۴ ۳}$ ۔

۱۸ ۔ منحنی ر^۲ = ا^۲ جم طہ کو مرتسم کرو ۔

۱۹۔ "زیادہ سے زیادہ تجاذب والے مجسم کے لئے" یعنی اس شکل کے لئے جو منحنی ر۲ = ا۲ جم طہ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے ذیل کے خواص ثابت کرو

(۱) اس کا حجم $\frac{۴}{۱۵}$ π ا۳ ہے۔

(۲) زیادہ سے زیادہ عرض ۰.۷۷۰۸۲ ا ہے مبدأ سے ۰.۴۳۸۹ ا فاصلہ پر۔

(۳) حجم کا اوسط مرکز قطب سے $\frac{۱۵}{۳۲}$ ا فاصلہ پر ہے۔

۲۰۔ کسی منحنی کا "قطبی زیر مماس" وہ طول ہے جو قطب میں سے گزرنے والے خط پر جو سمتی نیم قطر پر عمود وار ہو، مماس کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طول ر۲ $\frac{فطہ}{فر}$ ہے۔
ثابت کرو کہ متکافی لولب میں قطبی زیر مماس مستقل ہوتا ہے۔

۲۱۔ نیم قطر ا کا دائرہ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکے دریچہ کی مماسی قطبی مساوات ہے
ع۲ = ر۲ ـ ا۲ جہاں مرکز قطب ہے۔

۲۲۔ ارشمیدس کے لولب (شکل ۱۱۱) میں ثابت کرو کہ ع۲ = $\frac{ر^۴}{ا^۲ + ر^۲}$

۲۳۔ متکافی لولب (شکل ۹۷) میں ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱}{ر^۲} + \frac{۱}{ا^۲}$

۲۴۔ منحنی ر = $\frac{ا}{جم م طہ}$ میں ثابت کرو کہ $\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱ - م^۲}{ر^۲} + \frac{م^۲}{ا^۲}$

۲۵۔ ان منحنیات ر = $\frac{ا}{جمز م طہ}$، ر = $\frac{ا}{جبز م طہ}$ میں ثابت کرو کہ بالترتیب

$$\frac{۱}{ع^۲} = \frac{۱ + م^۲}{ر^۲} \mp \frac{م^۲}{ا^۲}$$

۲۶۔ برتدویر (دفعہ ۱۲۳) میں ثابت کرو کہ ر۲ = ا۲ + $\frac{۴(ا+ب)ب}{(ا + ۲ب)^۲}$ ع۲ ۲۲۰

درتدویر کے لئے متناظر ضابطہ کیا ہے۔

۲۷۔ کارٹیزی مساوات اس منحنی کی دریافت کرو جسمیں ع = ا جب سا جم سا $\left[ا^{\frac{۲}{م}} + ع^{\frac{۲}{م}} = ر^{\frac{۲}{م}}\right]$

۲۸ - اُس منحنی کی قطبی مساوات دریافت کرو جسمیں $ع^2 = \frac{4 ر^6}{ا^4 + 3 ر^4}$

۲۹ - ایک منحنی کی مماسی قطبی مساوات دی ہوئی ہے، اسکی قوس کے لئے ضابطہ

$$س = \int \frac{ر \, فر \, ر}{\sqrt{ر^2 - ع^2}}$$ ثابت کرو۔

۳۰ - ضابطہ $ع \, فس = ر^2 \, فط$ ثابت کرو اور اسکی ہندسی تعبیر بیان کرو، اِس لئے ثابت کرو کہ اگر وہ رقبہ جو کسی متحرک نقطہ کا سمتی نیم قطر عبور کرتا ہے وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھے تو نقطہ کی رفتار اُس عمود کے بالعکس متناسب ہوگی جو مبدأ سے راستہ کے مماس پر کھینچا جائے۔

امثلہ ۴۵

مربوط منحنی۔ دو قطبی مجدد

۱ - مساوی الزاویہ لولب کا مقلوب بلحاظ قطب کے ایک مساوی لولب ہے۔

۲ - قطع زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے، مرکز پر ایک عقدہ رکھتا ہے۔

۳ - قائم زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۴ - قطبی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے قطب میں سے گزرتا ہے اور برعکس اسکے۔

۵ - قطبی مساوات کے مدد سے ثابت کرو کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے۔

۶ - قطع مکافی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے خط صنوبری ہے۔
کسی مخروطی کا مقلوب بلحاظ ماسکہ کے گھونگا منحنی ہے۔

۷ - ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کا مقلوب بلحاظ مرکز کے منحنی

۲۲۱

$$(لا^2 + ما^2)^2 = م^4 \left(\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} \right)$$ ہے۔

نیز ثابت کروکہ جہاں منحنی محور $ﻻ$ کو کاٹتا ہے وہاں پر منحنی مبدأ کی جانب مقعر یا محدب ہوگا بموجب اسکے کہ $ب^۲ \gtrless ۲ ا^۲$۔

۸۔ خط صنوبری قطع مکافی کا مقلوب ہے بلحاظ ماسکہ کے۔ اس امر کو استعمال کرنے سے یا کسی اور طرح سے ثابت کروکہ قرن میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے تقاطع کو قرن کے ساتھ ملانیوالا خط وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔

۹۔ تقلیب سے یا کسی اور طرح سے ثابت کروکہ صنوبری خطوط

$ر = ا (۱ + جم طہ)$، $ر = ب (۱ - جم طہ)$ ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

۱۰۔ منحنی اور اسکے مقلوب کے متناظر عنصر $فرس$، $فرسَ$ ہیں، ثابت کروکہ

$فرس : فرسَ = ر^۲ : م^۲ = م^۲ : رَ^۲$ جہاں $ر$، $رَ$ سمتی نیم قطر ہیں۔

۱۱۔ قطع مکافی کا پائیں منحنی بلحاظ راس کے لبلابی خط (Cissoid) [دفعہ ۱۱۹ (۱۶)] ہے۔

۱۲۔ اگر ایک منحنی کے دو مماس ایک دوسرے سے مستقل زاویہ بنائیں تو ان کے نقطہ تقاطع (پ) کا طریق پ اور دو نقاط تماس میں سے گذرنے والے دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کروکہ پائیں منحنی کا رقبہ اس ضابطہ $\frac{۱}{۲} \int ع^۲ فرسا$ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ثابت کروکہ پائیں کی قوس اس ضابطہ $\int ر فرسا$ سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۵۔ قطع ناقص کے پائیں منحنی کا رقبہ ہے $\frac{۱}{۲} \pi (ا^۲ + ب^۲)$ جبکہ مرکز قطب ہو اور $ا$، $ب$ نیم محور ہوں۔

۱۶۔ قطع زائد $\frac{ﻻ^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کا پائیں منحنی بلحاظ مرکز کے دو حلقوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا رقبہ $\frac{۱}{۲} ا ب + \frac{۱}{۲} (ا^۲ - ب^۲)$ مس$^{-۱} \frac{ا}{ب}$ ہے۔

۱۷۔ اگر (قائم) محددوں کے مبدأ سے اور نقطہ $(ﻻ، ما)$ سے منحنی کے مماس پر عمود $ع$ اور $ع_۱$ کھینچے جائیں تو ثابت کروکہ

ع = ع - لا جم سا - ما جب سا

جہاں سا عمودوں کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔

۱۸ — ایک بند بیضوی منحنی کے دو پائیں منحنی بلحاظ مبدأ و اور ایک نقطہ (لا، ما) کے ہیں جبکہ یہ دونوں نقطے منحنی کے اندر واقع ہیں۔ ان پائیں منحنیوں کے رقبے ا، ا ہیں، ثابت کرو کہ

$$ا_١ = ا - لا \int_0^{٢\pi} ع جم سا ف سا - ما \int_0^{٢\pi} ع جب سا ف سا + \frac{١}{٢} \pi (لا^٢ + ما^٢)$$

۱۹ — ایک نقطہ کو قطب مانکر اگر ایک بند بیضوی منحنی کا پائیں منحنی لیا جائے تو اس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے، ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ کا طریق دائرہ ہے۔ اور مستقل کی مختلف قیمتوں کے جواب میں جو دائرے حاصل ہوتے ہیں وہ ہم مرکز ہیں۔

نیز اگر و مشترک مرکز ہو تو بلحاظ کسی اور نقطہ پ کے جو پائیں منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا رقبہ اس پائیں منحنی کے رقبہ سے جو بلحاظ و کے لیا جائے بقدر دائرہ (نیم قطر و پ) کے رقبہ کے زیادہ ہوتا ہے۔

۲۰ — مکافی $ما^٢ = ٤ ا لا$ کا منفی پائیں بلحاظ رأس کے منحنی

$٢٧ ا ما^٢ = (لا - ٤ ا)^٣$ ہے۔

۲۱ — کس صورت میں ع = ا جم سا ؟

۲۲ — ثابت کرو کہ جس منحنی کی صورت میں ع = ا جب سا جم سا وہ ستارہ نما

$$لا^{\frac{٢}{٣}} + ما^{\frac{٢}{٣}} = ا^{\frac{٢}{٣}}$$ ہے۔

۲۳ — بتاؤ کہ مساوات $ر^٢ + ر'^٢ = م^٢$ (مستقل) کو بلحاظ قوس (س) کے تفرق کرنے سے کیا خاصیت حاصل ہوتی ہے اور نتیجہ کی ہندسی طریق پر تصدیق کرو۔

۲۴ — کیتینینی کے بیضوی کے کسی نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا یہ عمل ثابت کرو۔ پ س اور پ سَ میں بالترتیب نقطے ق اور قَ لو ایسے کہ پ ق = پ سَ اور پ قَ = پ س۔ جو خط پ کو ق قَ کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملاتا ہے وہ مطلوبہ عماد ہے۔

۲۵ — متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مطلوب ہے کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے، ثابت کرو کہ انعکاسی منحنی قطع مکافی ہے۔

۲۶ — متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعطف ہونا مقصود ہے کہ انعطاف کے بعد شعاعیں ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں۔ ثابت کرو کہ انعطافی منحنی ایک مخروطی تراش ہے اور مخروطی کا خروج المرکز انعطاف نماؤں کی نسبت کے مساوی ہے۔

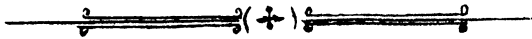
۲۷ — ثابت کرو کہ کارٹیزی بیضوی کی مساوات اس شکل کی ہے

ر² − ۲ (ا + ب جم ط۱) ر + ج² = ۰

جہاں کسی ماسکہ کو قطب مانا گیا ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ کارٹیزی بیضوی لازماً ایک بند منحنی ہوگا اگر اس صورت کو جس میں منحنی قطع زائد کی ایک شاخ ہے مستثنیٰ کر دیا جائے۔

۲۳۳

دسواں باب

انحنا

۲۳۱- انحنا کا ناپ - مستوی منحنیات کے نظریہ میں احصا کا جو استعمال ہے اس کے متعلق ابتک ہمیں منحنی کے مختلف نقاط پر مماس کی سمت کے ساتھ ہی سروکار رہا ہے، ابھی خاص طور پر ہم نے اس پر غور نہیں کیا کہ کس طرح نقطہ بہ نقطہ یہ سمت منحنی پر بدلتی ہے۔

انحنا کا مضمون کئی غیر متعلق پہلوؤں سے بحث میں لایا جا سکتا ہے اور اگرچہ تمام طریقوں سے بالکل وہی ضابطے حاصل ہوتے ہیں تاہم طالب علم کے لئے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اساسی طور پر استدلال میں وہ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔

*پہلے طریقہ میں ہم منحنی کی کسی قوس کے "پورے" یا "مکمل" انحنا کی تعریف سے ابتدا کرتے ہیں، پورا انحنا وہ زاویہ مف سا ہے جس میں سے مماس گھوم جاتا ہے جبکہ اس کا نقطہ تماس قوس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک سفر کرتا ہے۔

اور قوس کا "اوسط انحنا" اُس نسبت سے متعین ہوتا ہے جو پورے انحنا کو قوس کے طول (مف س) کے ساتھ ہو پس اس تعریف کے مطابق اوسط انحنا $\frac{\text{مف سا}}{\text{مف س}}$ ہے۔

* اور طریقے دفعات ۱۳۶، ۱۳۷ میں بیان کئے گئے ہیں۔

اور تعریف کے طور پر منحنی کے "کسی نقطہ پ پر کا انحنا" اس لاانتہا چھوٹی قوس کا اوسط انحنا خیال کیا جاتا ہے جو اس نقطہ پر منتہی ہوتی ہے۔
پس احصا کی ترقیم کے مطابق کسی نقطہ پر کا انحنا

$\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ .... (۱) سے تعبیر ہوگا۔

ایک دائرہ کیلئے جس کا نیم قطر ر ہو مف س = رمف سا

اور اس لئے $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{1}{\text{ر}}$ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دائرہ کا انحنا اس کے نیم قطر کے مکافی سے ناپا جاتا ہے۔ پس اگر ایک دائرہ کا نیم قطر ں ہو جس کا انحنا وہی ہے جو کسی دئے ہوئے منحنی کا نقطہ پ پر ہے تو

$\text{ں} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}}$ .... (۲)

۳۲۴ اس نیم قطر (ں) کے دائرہ کو جس کا مماس نقطہ پ پر وہی ہو اور جس کا قعر اُسی سمت میں ہو جو اصلی منحنی کا ہے ہم "دائرہ انحنا" کہینگے۔ اس کے نیم قطر کو "نیم قطر انحنا" کہا جائیگا اور اس کے مرکز کو "انحنا کا مرکز"۔
اگر منحنی کے نقطہ پ سے کسی خاص سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے تو اس خط پر جو طول یہ دائرہ قطع کرتا ہے اُسے اس سمت میں کے "وتر انحنا" کے نام سے موسوم کیا جائیگا۔ اگر وتر کی سمت عماد کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو وتر کا طول ل اس مساوات سے حاصل ہوگا

ل = ۲ ں جم طہ .... (۳)

اگر انحنا کے مرکز کے قائم محدد (ضا، عا) ہوں تو قائم ظل ڈالنے سے

ضا = لا - ں جب سا، عا = ما + ں جم سا .... (۴)

بشرطیکہ سا کا صفر اُس مقام سے شروع ہو جہاں مماس لا کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

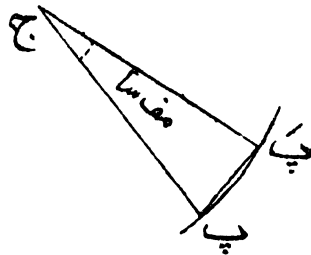
انحنا کا مرکز منحنی کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

منحنی کے دو متصل نقاط پر پ ج، پَ ج دو عماد ہیں اور ان کے درمیان زاویہ مف سا ہے اور قوس پ پَ، مف س ہے، تب وتر پ پَ کھینچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (شکل ۱۰۷)

$$\frac{\text{ج پ}}{\text{پ پَ}} = \frac{\text{جب ج پَ پ}}{\text{جب مف سا}}$$

$$\text{یا ج پ} = \text{جب ج پَ پ} \times \frac{\text{پ پَ}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{مف سا}}{\text{جب مف سا}} \times \frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$$

جب، پَ کو پ کے لا انتہا قریب لیا جائے تو بائیں جانب کے ہر جزو ضربی کی انتہا ایک ہوتی ہے سوائے $\frac{\text{مف س}}{\text{مف سا}}$ کی انتہا کے۔ پس آخر الامر

$$\text{ج پ} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}} = \text{ر}$$

شکل (۱۰۷)

جدید ہندسہ میں ہم یوں خیال کرتے ہیں کہ منحنی کی تکوین دو طرح سے عمل میں آتی ہے ایک تو یہ ایک نقطہ کا طریق ہو سکتا ہے، دوسرے یہ ایک خط مستقیم کا لفاف ہو سکتا ہے (دفعہ ۱۴۱)۔ حرکت کے ان متعلق عنصروں کے کسی مسلسل

تواتر پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم کسی آن میں ' نقطہ کے گرد حرکت کر رہا ہے اور یہ نقطہ خط مستقیم پر سفر کر رہا ہے اور انحنا $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ ان دو حرکتوں کے باہمی رشتہ کو بیان کرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ پر انحنا صفر ہے تو مماس کا گھماؤ ایک لمحہ کے لئے رک جاتا ہے اور "ساکن یا اچل مماس" کی صورت پیدا ہوتی ہے۔ اسکی سادہ ترین مثال "نقطہ انعطاف" کی ہے (دفعہ ۶۷) جہاں پر مماس کے گھماؤ کی سمت' رکنے کے بعد' الٹ جاتی ہے۔

۳۲۵ اگر کسی نقطہ پر نیم قطر انحنا ($\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}}$) صفر ہو جائے تو نقطہ کی حرکت خط مستقیم پر ایک لمحہ کے لئے رک جاتی ہے اور "ساکن یا اچل نقطہ" پیدا ہوتا ہے۔ اس کی سادہ مثال ایک "قرن" ہے جیسا ہم نے اشکال ۷، ۴، ۹، ۸۳ وغیرہ میں دیکھا ہے۔ ایسی صورتوں میں نقطہ کی حرکت کی سمت رکنے کے بعد الٹ جاتی ہے۔ دفعہ ۱۱۹ کی مثالوں میں ہم نے دیکھا تھا کہ قرن ایک حلقہ کے معدوم ہونے سے پیدا ہوتا ہے۔ یہ اس امر کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ ہے کہ نصف قطر انحنا کو یہاں پر کیوں صفر ہونا چاہئے۔

علم حرکت اور طبعیات کے مسائل میں انحنا کا تخیل بہت اہمیت رکھتا ہے، مثلاً علم حرکت میں اگر ایک متحرک ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کو بالترتیب دو اجزا میں تحلیل کیا جائے ایک مماس کی سمت میں اور دوسرے عماد کی سمت میں تو پہلا جزو رفتار پر اثر رکھتا ہے اور دوسرا حرکت کی سمت پر۔ اگر ایک ثابت مبدأ سے وص سمتی (Vector) کھینچا جائے جو کسی آن میں ذرہ کی رفتار کو تعبیر کرے تو ص کے قطبی محدد ع اور سا لئے جاسکتے ہیں جہاں ع = $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$۔ اس طرح ص کی قطری اور عمودی رفتاریں بالترتیب ہونگی (دفعہ ۱۱۲ (۲))

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} \quad \text{اور} \quad ع\,\frac{\text{فرسا}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اور یہ رفتاریں تغیر کی شرحیں ہیں ذرہ کے مدار کے مماس اور عماد کی سمت میں
اور چونکہ $\frac{\text{فر}^2 \text{سا}}{\text{فر ت}^2} = ع \frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \frac{ع^2}{ر}$ ....(۶)

یہ آخر کا جزو ترکیبی، رفتار کے مربعے اور انحنا کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۳۴ ـ **منحنی کی ذاتی مساوات۔** ضابطہ $ر = \frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}}$ فوراً لگ سکتا ہے اگر منحنی زیر بحث کے لئے س اور سا کا باہمی رشتہ اس شکل میں معلوم ہو

$$\text{س} = \text{ف} (\text{سا}) \quad ....(۲)$$

یہ منحنی کی " ذاتی مساوات " کہلاتی ہے کیونکہ اسکی شکل میں منحنی کے باہر کے مکانی عنصر شریک نہیں ہوتے ۔ اس میں اختیاری عنصر صرف س کا مبدأ اور سا کا مبدأ ہیں اور ان میں سے کسی ایک میں تبدیلی کا اثر صرف یہ ہوگا کہ متناظر تغیر میں ایک مستقل کا اضافہ ہو جائیگا ۔

اگر منحنی کی ذاتی مساوات معلوم نہ ہو تو دفعہ ۱۳۵ کا کوئی ایک ضابطہ استعمال ہو سکتا ہے یا خاص صورتوں میں خاص ترکیبیں عمل میں لائی جا سکتی ہیں دیکھو ذیل کی مثالیں ۴ اور ۵ ۔

۲۲۶

مثال ۱ ـ زنجیرہ میں

$$\text{س} = ا \text{ س سا} \quad ....(۳)$$

جس سے $ر = ا \text{ قط}^2 \text{سا} = ما \text{ قط سا}$ ....(۴)

دفعہ ۱۲۰ کی ترقیم کے موافق ۔ اس دفعہ کی شکل کے حوالہ سے معلوم ہوگا کہ نیم قطر انحنا عماد پ گ کے مساوی ہے ۔

مثال ۲ ـ خط تدویر (cycloid) (دفعہ ۱۲۲) میں

$$\text{س} = ۴ ا \text{ جب سا} \quad ....(۵)$$

اور اس لئے $ر = ۴ ا \text{ جم سا}$ ....(۶)

اس لئے شکل ۹۰ میں ر = ۲ پ ہے یعنی انحنا کا نیم قطر عماد کا دوچند ہے ۔

مثال ۳ ـ برنذویر (Epicycloid.) دفعہ ۱۲۳ (۱۱) میں

$$\text{س} = \frac{\text{۴(ا + ب)ب}}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{\text{ا+۲ب}}\ \text{سا} \quad ......(۷)$$

اوراس لئے

$$\text{ر} = \frac{\text{۴(ا + ب)ب}}{\text{ا + ۲ب}}\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{\text{ا+۲ب}}\ \text{سا}$$

$$= \frac{\text{۴(ا + ب)ب}}{\text{ا + ۲ب}}\ \text{جم}\ \frac{\text{فہا}}{\text{۲}} \quad .....(۸)$$

اِس لئے شکل ۸۱ (دفعہ ۱۲۳) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{ر} = \frac{\text{۲(ا + ب)}}{\text{ا + ۲ب}}\ \text{پ ہے} \quad ....(۹)$$

جہاں پ ہے عماد کا طول ہے مرتسم نقطہ اور ثابت دائرہ کے درمیان۔

مثال ۴ ـ مکانی $\text{ما}^2 = \text{۴ا لا}$ میں $\text{ما} = \text{۲ا جم سا}$ ....(۱۰)

$$\text{جس سے جب سا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = -\frac{\text{۲ا}}{\text{جب}^2\text{سا}}\ \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{یا ر} = -\frac{\text{۲ا}}{\text{جب}^2\text{سا}} \quad ....(۱۱)$$

منفی علامت کا یہ مفہوم ہے کہ سا گھٹتا ہے جیسے س بڑھتا ہے۔

مثال ۵ ـ اگر قطع ناقص لا = ا جم فہا، ما = ب جب فہا ....(۱۲)

کو دائرہ لا = ا جم فہا، ما = ا جب فہا ....(۱۳)

کا قائم ظل تصور کیا جائے تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرفہا}} = \text{بہا} \quad ....(۱۴)$$

۳۲۷

جہاں بہا فرودج نیم قطر ہے۔ کیونکہ قوس کا عنصر ا مف فہا سے بدلکر مف س ہو جاتا ہے اور متوازی نیم قطر ا سے بدلکر بہا ہو جاتا ہے۔ نیز چونکہ $\frac{1}{2}\,\text{بہا}^2\ \text{مف سا}$ اور $\frac{1}{2}\,\text{ا}^2\ \text{مف فہا}$ رقبہ کے متناظر عنصر ہیں اس لئے

$$\text{بہا}^2\ \text{مف سا} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{ا}^2\ \text{مف فہا}$$

یا $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^{۲}}{\text{اب}}$ .... (۱۵)

اسلئے $\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرفہ}} \times \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{بہ}^{۳}}{\text{اب}}$ .... (۱۶)

اگر مماسی خط پر مرکز سے عمود ع ہو تو ع بہ = اب اور اوپر کا نتیجہ اس طور پر لکھا جا سکتا ہے

$\text{ر} = \frac{\text{بہ}^{۲}}{\text{ع}}$ یا $\text{ر} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}{\text{ع}^{۳}}$ .... (۱۷)

چونکہ $\text{ع}^{۲} = \text{ا}^{۲}\text{جم}^{۲}\,\text{سا} + \text{ب}^{۲}\text{جب}^{۲}\,\text{سا} = \text{ا}^{۲}(۱ - \text{ز}^{۲}\text{جب}^{۲}\,\text{سا})$

موخرالذکر صورت اس شکل کے معادل ہے (ز خروج المرکز ہے)

$\text{ر} = \text{ا}\,\frac{۱ - \text{ز}^{۲}}{(۱ - \text{ز}^{۲}\text{جب}^{۲}\,\text{سا})^{\frac{۳}{۲}}}$ .... (۱۸)

اس ضابطہ سے ارضیات (Geodesy) میں ایک مشہور نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر زمین کی شکل کو گردش کا ناقص نما خیال کیا جائے تو $\text{ز}^{۴}$ کو نظر انداز کرنے سے عرض بلد سا کی رقوم میں نیم قطر انحنا کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{ا}(۱ - \text{ز}^{۲} + \frac{۳}{۲}\text{ز}^{۲}\text{جب}^{۲}\,\text{سا}) = \text{ا}(۱ - \frac{\text{صہ}}{۲} - \frac{۳}{۲}\,\text{صہ جم}\,۲\text{سا})$ .... (۱۹)

جہاں $\text{صہ} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}} = \frac{۱}{۲}\text{ز}^{۲}$ یعنی صہ سے نصف النہار کی ناقصیت (Ellipticity) تعبیر ہوتی ہے، (۱۹) کو تکمل کرنے سے نصف النہار کی قوس کا طول، استواء سے عرض بلد سا تک حاصل ہوتا ہے

$\text{س} = \text{ا}(۱ - \frac{\text{صہ}}{۲})\,\text{سا} - \frac{۳}{۴}\,\text{ا صہ جب}\,۲\text{سا}$ ..... (۲۰)

مثال ۶ - مساوی الزاویہ لولبی (دفعہ ۱۲۶) میں

سا = طہ + عہ ....(۲۱)

اِس سے $\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} = \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر س}} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{ر}}$

یا $\text{ہ} = \frac{\text{ر}}{\text{جب عہ}}$ ....(۲۲)

پس نیم قطر انحنا کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۵ ـ نیم قطر انحنا کے لئے ضابطے ۔ انحنا کا ضابطہ $\frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}}$ آسانی سے کئی اور صورتوں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(۱) قائم کارٹیزی محددوں میں

$\text{مس سا} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ....(۱)

اسلئے $\text{قط}^2 \text{سا} \frac{\text{فر سا}}{\text{فر س}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر س}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right) = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} = \text{جم سا} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$

جس سے $\frac{1}{\text{ہ}} = \frac{\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$ ....(۲)

اِس شکل سے پھر ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر، جہاں $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 0$ (دفعہ ۶۷) انحنا صفر ہوتا ہے۔

جب، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ایک چھوٹی مقدار ہو تو ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے تقریباً

$\frac{1}{\text{ہ}} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ ....(۳)

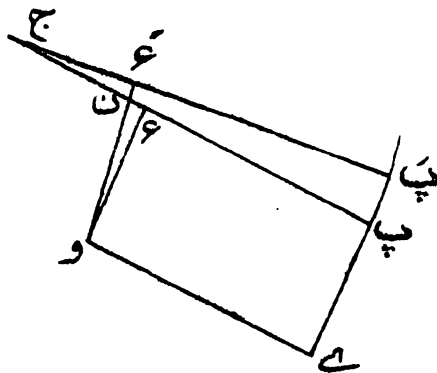
۳۴۸

اور تناسبی خطا ہمیں دوسرے رتبہ کی ہوگی۔ صریحاً یہ ضابطہ $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$ کی نقل ہے کیونکہ جب سا چھوٹا ہو تو سا کی بجائے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (= مس سا) لکھا جا سکتا ہے اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}$ کی بجائے $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$۔ سلاخوں کی خمیدگی کے نظریہ میں اِس ضابطہ کا استعمال بہت اہمیت رکھتا ہے۔

(۲) دفعہ ۱۳۱ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ نیم قطر کا ظل (ص) مماس پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ص} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} \quad \text{.........(۴)}$$

اگر مبدأ سے دو متصل مماسوں پ ج، پَ ج پر عمود وع، وعَ ہوں اور اگر وعَ پ ج سے ن پر ملے تو بالآخر

وعَ ـ وع = عَ ن = ج ن مف سا یا مف ص = ج ن مف سا

شکل (۱۰۸)

 اِس لئے ج ع یا ج ن کی انتہائی قیمت $\frac{\text{فرص}}{\text{فرسا}}$ ہے جس سے

$$\text{ر} = \text{ج پ} = \text{و ے} + \text{ج ع} = \text{ع} + \frac{\text{فر ص}}{\text{فر سا}} = \text{ع} + \frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فر سا}^2} \quad \ldots\ldots (۵)$$

(۳) دفعہ ۱۱۲ کی ترقیم کے موافق

$$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \text{جم فہ} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

چونکہ $\frac{\text{فر س}}{\text{فر سا}} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر ر}} \times \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ع}} \cdot \frac{\text{فر ع}}{\text{فر سا}} = \text{ص}\, \frac{\text{فر س}}{\text{فر ر}} \times \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ع}}$

اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر} = \frac{\text{ر فر ر}}{\text{فر ع}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یہ ضابطہ بڑی سہولت سے استعمال ہو سکتا ہے جب مماسی قطبی مساوات (دفعہ ۱۲۹) معلوم ہو۔

مثال ۱۔ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ا جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۸)$

کی صورت میں

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جبز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}،\quad \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}} \text{جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}،\quad 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = \text{جمز}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

اِس لئے $\text{ر} = \text{ا جمز}^2 \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right) = \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۹)$

چونکہ ما = ا قط سا، اِس لئے نتیجہ (۹) دفعہ ۱۳۴ مثال ۱ کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ مکافی میں $\text{ر} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

$$\text{ر} = \frac{\text{ر فر ر}}{\text{فر ع}} = \frac{2\text{ع}^3}{\text{ا}^2} = \frac{2\text{ر}^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

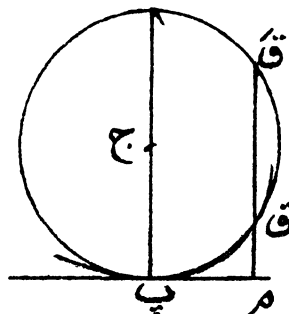
مثال ۳۔ مرکزدار تراشوں میں (دفعہ ۱۲۹، مثال ۴)

$$\frac{ا^2 ب^2}{4 ع} = ب^2 \pm ا^2 \mp ر^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

اِس لئے
$$\rho = \pm \frac{ا^2 ب^2}{4 ع} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ امثال ۵ -

۱۳۶ - **نیوٹن کا طریقہ** - انحنا پر بحث کرنے کا ایک اور طریقہ ہے جسے نیوٹن [*] نے استعمال کیا - اس میں ایک دائرہ کھینچا جاتا ہے جو منحنی کو پ پر مس کرتا ہے اور ایک پاس کے نقطہ ق میں سے گذرتا ہے - اِس کے بعد اِس دائرہ کے نیم قطر کی انتہائی قیمت معلوم کیجاتی ہے جبکہ ق، پ کے لاانتہا قریب آجائے -

یہ بآسانی ثابت ہوسکتا ہے کہ انتہا میں یہ دائرہ بالکل وہی ہے جو پ پر کا انحنا کا دائرہ ہے اور جس کی تعریف دفعہ ۱۳۳ میں کی گئی ہے

شکل (۱۰۹)

کیونکہ اگر ج مرکز ہو تو ج پ = ج ق اور اس لئے پ اور ق کے

[*] Principia, lib I, prop VI Cor 3.

درمیان کوئی نقطہ پ ایسا ضرور ہوگا کہ اس کا فاصلہ ج سے اعظم یا اقل ہو اور اسلئے* ایسا کہ ج پ منحنی کا عماد ہو۔ انتہا میں پَ پ کے لاانتہا قریب آجاتا ہے اور ج متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع "مرکز انحنا" پر منطبق ہوتا ہے۔

نیوٹن کے طریقہ سے نیم قطر انحنا کے لئے ایک نہایت سادہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ پ پر کے مماس پر قَ ق م ایک عمود کھینچا گیا ہے جو دائرہ سے پھر قَ پر اور مماس سے م پر ملتا ہے۔ چونکہ

م پ۲ = م ق × م قَ اس لئے

$$۲ ر = نہا م قَ = نہا \frac{م پ^۲}{م ق} \quad ....(۱)$$

اگر قَ ق م کو اس طور پر کھینچا جائے کہ یہ پ پر کے عماد کے متوازی ہونے کی بجائے، اس عماد کے ساتھ ایک معلومہ میلان رکھے تو کسر (۱) کی انتہائی قیمت سے مماثل سمت میں وتر انحنا حاصل ہوگا۔ بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ کسی خاص سمت میں وتر انحنا خاص سہولت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے، اس کے بعد نیم قطر انحنا ضابطہ (۳) دفعہ ۱۳۲ سے حاصل ہو سکیگا۔

مثلاً کارٹیزی محددوں میں نیم قطر انحنا کے لئے ضابطہ مستنبط ہو سکتا ہے بحوالہ شکل ۲۸ صفحہ (۲۱۴) محور ما کے متوازی وتر انحنا کو ق سے تعبیر کرو

$$تو \frac{۱}{ق} = نہا \frac{ق ع}{پ ع^۲} = نہا \frac{ق ع}{ا ع^۲} جم^۲ سا$$

$$= \frac{۱}{۲} فنا (لا) جم^۲ سا \quad ....(۲)$$

جہاں سا، پ پر کے مماس کا میلان محور لا کے ساتھ ہے۔

چونکہ ق = ۲ر جم سا، مس سا = فنا (لا)

اس لئے حاصل ہوتا ہے کہ

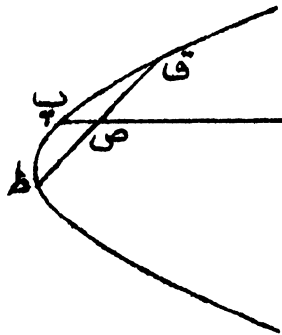
---

* دیکھو دفعہ ۶۳ مثال ۲۔

$$\frac{1}{ر} = \text{فہً}(ر)\ \text{جم}^3\ \text{سا} = \frac{\text{فہً}(ر)}{\left[1 + \{\text{فہَ}(ر)\}^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور یہ ضابطہ (۲) دفعہ ۱۲۵ کے بالکل مطابق ہے، صرف ترقیم کا فرق ہے۔

۱۴۴ مثال ۱۔ قطع ناقص میں فرض کرو کہ وتر ق ط، پ پر کے مماس کے متوازی ہے اور پ میں سے گذرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے (شکل ۱۱۰) منحنی کے ہندسہ کی رو سے

$$\text{ق ص}^2 = ۴\ \text{س پ} \times \text{پ ص}$$

شکل (۱۱۰)

جہاں س ماسکہ ہے۔ اس لئے محور کے متوازی وتر انحنا ق کے لئے

$$\text{ق} = \text{نہا}\ \frac{\text{ق ص}^2}{\text{پ ص}} = ۴\ \text{س پ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اگر پ پر کا عماد محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو $\text{جم طہ} = \frac{\text{س ے}}{\text{س پ}}$

جہاں س ے ماسکہ سے پ پر کے مماس پر عمود ہے، اسلئے

$$ر = \frac{1}{2}\ \text{ق قط طہ} = ۲\ \frac{\text{س پ}^2}{\text{س ے}} = ۲\ \frac{\text{س پ}^{\frac{3}{2}}}{\text{س ا}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

کیونکہ س ہے^۲ = س ا × س پ جہاں ا رائس ہے۔

مثال ۲۔ قطع ناقص (یا زاید) میں قطر پ ج پَ کے کسی ایک سرے پر کے مماس کے متوازی وتر ق ط کھینچا گیا ہے اور یہ اس قطر سے ص پر ملتا ہے تو

ق ص^۲ : پ ص × ص پَ = ج د^۲ : ج پ^۲

شکل (۱۱۱)

جہاں ج د، ج پ کا مزدوج نیم قطر ہے۔ اسلئے مرکز میں سے گذرنیوالے وتر انحناق کیلئے

$$ق = نہا \frac{ق ص^۲}{پ ص} = نہا \frac{ج د^۲}{ج پ^۲} × ص پَ$$

$$= \frac{۲ ج د^۲}{ج پ} \quad ....(۶)$$

اگر مرکز سے پ پر کے مماس پر عمود ج ے ہو اور ج پ عماد کے ساتھ زاویہ

طھ بنائے تو جم طھ = $\frac{ج ے}{ج پ}$ اور اس لئے

$$ر = \frac{۱}{۲} ق قط طھ = \frac{ج د^۲}{ج ے} \quad ....(۷)$$

جو دفعہ ۴۱۳ (۱۷) کے مطابق ہے۔

اگر پ کے کسی ماسکی فاصلہ کا زاویہ پ پر کے عماد کے ساتھ طھ ہو تو ہم

جانتے ہیں کہ جم طہ = ج سے / ج ا جہاں ا محور اعظم کا سرا ہے۔ اس لئے
کسی ایک ماسکہ میں سے گذرنے والا وتر انخنا (قَ) حاصل ہوتا ہے

قَ = ۲ ر جم طہ = ۲ ج دَ² / ج ا ....(۸)

مثال ۳ - خط تدویر لا = ا (طہ + جب طہ) ما = ا (ا - جم طہ) ....(۹)
کے راس پر نیم قطر انخنا (ر) دریافت کرو -

لا² / ۲ ما = ا (طہ + جب طہ)² ÷ ۴ جب² طہ/۲ = ا (ا + جب طہ / طہ)² ÷ (جب طہ/۲ / طہ/۲)²

اس سے ر = نہا لا² / ۲ ما = ۴ ا ....(۱۰)
طہ ← ۰

۱۳۷ - لثمی دائرہ (Osculating circle) -

انحنا پر بحث کرنے کا ذرا مختلف طریقہ "لثمی دائرہ" کے تخیل پر مبنی ہے۔ اگر منحنی پر پ کے قریب دو نقطے ق اور ط ہوں جہاں* ایک نقطہ پ کے ایک طرف واقع ہے اور دوسرا دوسری طرف تو دائرہ پ ق ط کے نیم قطر کی انتہائی قیمت پر ہم غور کرتے ہیں جبکہ ق اور ط دونوں پ کے لاانتہا قریب آجاتے ہیں -

اگر منحنی زیر بحث کا انحنا پ پر مسلسل ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دائرہ انتہا میں "دائرہ انحنا" پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ج ہو تو پ اور ق کے درمیان ایسا نقطہ پَ ضرور ہوگا کہ ج پَ معلومہ منحنی پر عماد ہو اور اسی طرح ایک نقطہ پً نقاط پ اور ط کے درمیان ایسا ہوگا کہ ج پً منحنی پر عماد ہو۔ فرض کرو کہ پَ ج اور پً ج

* یہ شرط ضروری نہیں لیکن اس سے ثبوت میں سہولت پیدا ہوتی ہے اور دیگر معمولی شرطیں اس سے پوری ہوتی ہیں -

نقطہ پ کے عماد سے بالترتیب ج′ اور ج″ پر ملتے ہیں۔ شرط مذکورۂ بالا کی رو سے

شکل (۱۱۲)

ج′ اور ج″ آخرالامر پ پر کے مرکز انحنا پر منطبق ہوں گے اور چونکہ ج′ < ج < ج″
اس لئے ج بوجوہ مستحکمہ آخرالامر اس نقطہ پر منطبق ہوگا۔

۴۴۳

چونکہ انتہا سے پہلے، دائرہ پ ق ط دئے ہوئے منحنی کو پ کی پڑوس میں تین دفعہ عبور کرتا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تمی دائرہ عام طور پر منحنی کو نقطہ تماس پر عبور کریگا دیکھو شکل ۱۱۲ صفحہ (۴۶۹)۔

اگر شکل ۱۴ حصۂ اول صفحہ (۲۱۰) میں ق، نقاط پ، ق، پ میں سے گذرنے والے دائرہ سے دوبارہ ع پر ملے تو $ع ع = \frac{پ ع}{ق ع}$

اس لئے منحنی ما = فہ (لا) کے اس وتر انحنا کے لئے جو محور ما کے متوازی ہے

$\frac{۱}{ق} = نہا \frac{ق ع}{پ ع} = نہا \frac{ق ع}{ح^۲ ۱} جم^۲ سا = \frac{۱}{۲} فہ″ (ا) جم^۲ سا$

جیسا دفعہ ۱۳۶ (۲) میں ثابت کیا گیا۔

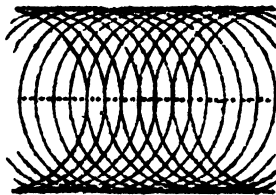
مثال۔ اگر شکل ۱۱۰ میں دائرہ پ ق ط، پ ص سے ع پر ملے تو
ق ص × ص ط = پ ص × ص ع اور اس لئے ص ع = ۴ س پ

اس سے معلوم ہوا کہ انحنا کا وتر قطع مکافی کے محور کے متوازی ۴ س پ ہے۔
اسی طرح کا استدلال قطع ناقص کی صورت میں، مرکز میں سے گذرنے والا وتر انحنا دریافت کرنیکے

استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۸۔ لفاف۔ فرض کرو کہ منحنیات کا ایک واحد لا تناہی نظام یا قبیل ہے اور اس قبیل کے الگ الگ منحنی ایک مستقل کو جو قبیل کی تخصیص کرتا ہے مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نظام کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کرینگے لیکن یہاں ہم بالخصوص نقاط تقاطع کے انتہائی مقامات پر بحث کرینگے جبکہ مستقل [یا جسے نظام کا متبدل (parameter.) بھی کہتے ہیں] میں تبدیلی لا انتہا کم ہو جب ہم ایک منحنی سے دوسرے منحنی تک جائیں۔ اس طرح عام طور پر ایک یا زیادہ "انتہائی نقاط تقاطع" ہر ایک منحنی پر ہونگے جہاں پر یہ ساتھ کے منحنی کو کاٹتا ہے۔ ان انتہائی نقاط تقاطع کا طریق نظام کا "لفاف" کہلاتا ہے۔

مثال ۱۔ معلوم نصف قطر کے دائروں کا ایک نظام ہے، ان کے مرکز ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اس جگہ متبدل مرکز کا محدد ہے۔

شکل (۱۱۳)

اگر نظام کے دو دائروں کے مرکز ج، جَ ہوں تو ان کے نقاط تقاطع کو ملانے والا خط ججَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے۔ اس لئے کسی دائرہ کے انتہائی نقاط تقاطع ساتھ کے دائرہ کے ساتھ اس قطر کے سرے ہیں جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔

اس لئے لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہیں اور ان سے معلومہ نیم قطر کے فاصلہ پر واقع ہیں۔

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم ہے جو محوروں کے ساتھ ملکے مستقل رقبہ (م) کا مثلث بناتا ہے۔ خط کے دو محل ا ب، اَ بَ ہوں جو ب پر قطع کرتے ہیں۔

مثلث اپ اَ ب پ ب مساوی ہیں اس لئے

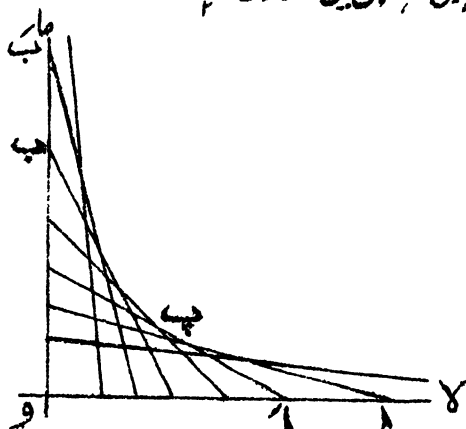
پ ا × پ اَ = پ ب × پ بَ

اس لئے آخر الامر جب ا اَ لا انتہا چھوٹا ہو تو پ، ا ب کا وسطی نقطہ ہوگا۔ اگر (لا، ما) نقطہ پ کے محدد ہوں اور محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو

و ا = ۲ لا، و ب = ۲ ما، اس لئے

۲ لا ما جب سہ = م۲

اسلئے لفاف قطع زائد ہے جس کے متقارب حوالہ کے محور ہیں۔ شکل ۱۱۴ سے اس صورت کی توضیح ہوتی ہے جس میں سہ = ط/۲

شکل (۱۱۴)

۱۲۹۔ لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ۔

فرض کرو کہ نظام کے کسی منحنی کی مساوات ہے

فہ (لا، ما، عہ) = ۰ .... (۱)

جہاں عہ متبدل ہے۔ جن نقطوں پر یہ نظام کے دوسرے منحنی

فہ (لا، ما، عہَ) = ۰ ...... (۲)

کو قطع کرتا ہے ان نقاط پر صریحاً

$$\frac{\text{فہ (لا، ما، عہَ) - فہ (لا، ما، عہ)}}{\text{عہَ - عہ}} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

جب تغیر عہ۔ عہ لاانتہا کم ہو تو یہ آخری مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{جف}{جف\ عہ} \text{ فہ } (لا، ما، عہ) = ۰ \quad \ldots\ldots (۴)$$

جہاں $\frac{جف}{جف\ عہ}$ بلحاظ عہ کے جزوی تفرق کی علامت ہے دیکھو دفعہ ۴۴۵-۴۴

انتہائی تقاطع کے نقطہ یا نقاط کے محدد (۱) اور (۴) کو بطور ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۳۸ مثال ۱ کے دائرے اس مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$(لا - عہ)^۲ + ما^۲ = ا^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے

$$لا - عہ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

(۵) اور (۶) کے درمیان عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = \pm ا \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

جو مطلوبہ لفاف ہے۔

مثال ۲۔ اگر ذرہ مبدأ سے زاویہ ارتفاع طہ پر ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو بلندی ب "کی وجہ" سے ہے، تو مکانی راستہ کی مساوات ہے

$$ما = لا \text{ مس طہ} - \frac{۱}{۴} \frac{لا^۲}{ب} \text{ قط}^۲ \text{طہ} \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں لا، ما کے محور بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں ۔ مس طہ کی بجاے عہ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = عہ لا - \frac{۱}{۴} \frac{لا^۲}{ب} (۱ + عہ^۲) \quad \ldots\ldots (۹)$$

مختلف ارتفاعوں یعنی عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے راستوں کا لفاف معلوم کرنیکے لئے ہم بلحاظ عہ کے (۹) کو تفرق کرتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا - ۱/۲ عہ لا^۲/ب = ۰ ....(۱۰)

یہ مساوات پوری ہوتی ہے لا = ۰ یا عہ لا = ۲ ب سے پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے ما = ۰ اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مبدأ طریق کا ایک حصہ ہے اور یہ ایسے بھی ظاہر ہے۔ دوسرے نتیجہ سے، عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا^۲ = ۴ ب (ب - ما) ....(۱۱)

یہ ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے، اس کا ماسکہ مبدأ پر ہے اور اس کا راس بلندی ب پر ہے۔*

۱۴۰ - جبریہ طریقہ - اگر مساوات

فہ (لا، ما، عہ) = ۰ ....(۱)

میں فہ، عہ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو گذشتہ دفعہ کے قاعدہ کی اور طرح سے بھی تحقیق ہوسکتی ہے۔ اگر لا، ما کو کوئی خاص قیمتیں دیجائیں تو مساوات سے عہ معلوم ہوتا ہے، یعنی اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ نظام کے کونسے منحنی دئے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں۔ اگر مساوات بلحاظ عہ کے ن ویں درجہ کی ہو تو ان منحنیات (حقیقی یا خیالی) کی تعداد ن ہوگی اور بالعموم یہ ن منحنی مختلف ہونگے۔ لیکن اگر نقطہ زیر بحث دو متصل منحنیوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ہو تو عہ کی دو قیمتیں منطبق ہونگی۔ دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ عہ میں مساوات کی دوہری اصل کے لئے شرط یہ ہے

۲۴۶

جف/جف عہ فہ (لا، ما، عہ) = ۰ ....(۲)

---

* تاریخی نقطہ نظر سے یہ مسئلہ دلچسپ ہے کیونکہ یہ پہلی مثال ہے جس میں منحنی خطوط کے قبیل کا لفاف حاصل کیا گیا (برنولی)۔ لفاف دریافت کرنے کا عام طریقہ لیب نیٹز کی ایجاد معلوم ہوتا ہے۔

اس لئے حسب سابق انتہائی تقاطع (۱) اور (۲) کو ہمزاد مساواتوں کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور لفاف ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر مساوات (۱) عہ میں درجہ اول کی مساوات ہو تو نظام کا صرف ایک منحنی نقطہ معلومہ میں سے گذرتا ہے اور اس صورت میں لفاف نہیں ہو سکتا۔ اس کی مثالیں متوازی خطوط اور ہم مرکز دائرے ہیں۔ مثلاً

ل لا + م ما = عہ .... (۳)

لا² + ما² = عہ .... (۴)

اگر (۱) درجہ دوم کی مساوات ہو مثلاً

پ عہ² + ۲ ق عہ + ر = ۰ .... (۵)

جہاں پ، ق، ر متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

پ ر = ق² .... (۶)

اس لئے یہ لفاف کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ خط مستقیم لا/عہ + ما/بہ = ۱ .... (۷)

حوالہ کے محوروں کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ (م²) کا مثلث قطع کرتا ہے۔ اسلئے

عہ بہ جیا سہ = ۲ م² .... (۸)

جہاں سہ محوروں کا میلان ہے۔ بہ کو ساقط کرنے سے متغیر خط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

عہ² ما جب سہ - ۲ عہ م² + ۲ م² لا = ۰ .... (۹)

اس امر کو بیان کرنے سے کہ یہ مساوات بلحاظ عہ کے مساوی اصلیں رکھتی ہے ہمیں لفاف کی مساوات یہ حاصل ہوتی ہے

۲ لا ما جب سہ = م² .... (۱۰)

جیسا کہ دفعہ ۱۳۸ مثال ۲ میں حاصل کیا گیا۔

مثال ۲ - زاویہ قائمہ کی ایک ٹانگ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور راس ایک ثابت خط مستقیم پر مرتسم کرتا ہے، دوسری ٹانگ کا لفاف مطلوب ہے۔

اگر ثابت خط مستقیم محور ما ہو اور ثابت نقطہ (ا، ۰) تو دوسری ٹانگ کی مساوات بآسانی حاصل ہوتی ہے

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

جہاں م محور لا کے ساتھ زاویہ میلان کا مماس ہے۔ اس مساوات کو اس شکل میں لکھنے سے

$$\text{م}^2\,\text{لا} - \text{م}\,\text{ما} + \text{ا} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف قطع مکافی ہے

$$\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

۱۴۱ - لفافوں کی تماسی خاصیت۔

اوپر کی مثالوں سے طالب علم ذیل کے مسئلہ کے ادراک کے لئے تیار ہو چکا ہوگا۔

منحنیات کے کسی نظام کا لفاف (بالعموم) اپنے ہر نقطہ پر نظام کے متناظر منحنی کو مس کرتا ہے۔

مساواتوں

$$\text{فا}(\text{لا}، \text{ما}، \text{عا}) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف عا}}\,\text{فا}(\text{لا}، \text{ما}، \text{عا}) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

سے لا، ما بطور عا کے تفاعل کے حاصل ہوتے ہیں، فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{فا}(\text{عا})، \quad \text{ما} = \text{فا}(\text{عا}) \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور مساواتوں (۳) سے لفاف کی تعیین ہوتی ہے۔ اگر (۳) سے لا، ما کی قیمتیں مساوات (۱) کے دائیں رکن میں درج کی جائیں تو عا کا ایک تفاعل حاصل ہوگا جو متماثلاً صفر ہوگا اور اس تفاعل کو بلحاظ عا کے تفرق کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ بھی صفر ہوگا، اس لئے دفعہ ۵۹ (آ) کے قاعدہ کی رو سے لازماً

$$\frac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف لا}_1}\cdot\frac{\text{فر لا}_1}{\text{فر عہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف ما}_1}\cdot\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر عہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف عہ}_1}\times\frac{\text{فر عہ}_1}{\text{فر عہ}_1}=0 \qquad (۴)$$

اور (۲) کی رو سے یہ ربط ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف لا}_1}\cdot\frac{\text{فر لا}_1}{\text{فر عہ}_1}+\frac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف ما}_1}\cdot\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر عہ}_1}=0 \quad \cdots\cdots (۵)$$

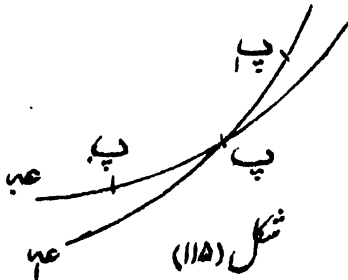
یا

$$\frac{\dfrac{\text{فر ما}_1}{\text{فر عہ}_1}}{\dfrac{\text{فر لا}_1}{\text{فر عہ}_1}}=-\frac{\dfrac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف لا}_1}}{\dfrac{\text{جف فہ}_1}{\text{جف ما}_1}} \quad \cdots\cdots (۶)$$

دفعہ ۶۱ کی رو سے اس مساوات کا دایاں رکن لفاف کے لئے $\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}$ کی قیمت ہے اور دفعہ ۵۹ (۱۰) کی رو سے بایاں رکن منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}$ کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے، اِس سے معلوم ہوا کہ انتہائی نقطہ تقاطع پر منحنی (۱) اور لفاف کا مماس وہی ہے۔ ۲۴۸

اس مسئلہ کا ہندسی پہلو یوں واضح ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل میں متبدل عہ کی قیمتوں عہ۱، عہ۲ کے جواب میں نظام کے دو منحنیات کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں اور یہ منحنی ایک دوسرے کو پ۱ پر قطع کرتے ہیں۔

شکل (۱۱۵)

فرض کروکہ پ، پ۱ لفاف پر کے متناظر نقطے ہیں یعنی پ، پ کا انتہائی مقام ہے جبکہ عہ کو قائم رکھہ کے، عہ۱ کو عہ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے اور پ۱، پ کا انتہائی مقام ہے جبکہ عہ۱ کو ثابت رکھکر عہ کو عہ۱ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے۔ چونکہ عہ عہ۱ کے یہ تغیر مقابل رخوں میں ہیں اور چونکہ پ کے محدد عام طور پر عہ، عہ۱ کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں، اس لئے پ کے متناظر ہٹاؤ پ پ۱ اور پ۱ پ عام طور پر تقریباً متقابل سمتوں میں ہونگے (جبکہ | عہ - عہ۱ | بہت چھوٹا ہو) اور پ پ۱ پ بڑے منفرجہ زاویہ والا مثلث ہوگا۔ اس لئے آخرالامر جب | عہ - عہ۱ | لاانتہا چھوٹا ہو تو وتر پ پ۱ اور پ۱ پ سمت میں منطبق ہوں گے یعنی لفاف کا مماس منحنی کے مماس پر منطبق ہوگا۔

بعض صورتوں میں اوپر کی تحقیق درست نہیں رہتی۔ جہاں تک تحلیلی ثبوت کا تعلق ہے یہ ظاہر ہے کہ (۵) سے کوئی نتیجہ مستنبط نہیں ہو سکتا جبکہ نقطہ زیر بحث پر ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \cdot \text{ ، } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \cdot \qquad \ldots\ldots (7)$$

یعنی جبکہ منحنی (۱) کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت یگانہ طور پر معین نہ ہو سکے۔ یہ خصوصیت ایک "نادر نقطہ" پر پیدا ہوتی ہے خواہ اپنی نوعیت کے لحاظ سے یہ عقدہ ہو یا قرن یا اکیلا نقطہ (دیکھو دفعہ ۱۱۹)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ قبیل کے نادر نقطوں کا طریق، اگر ایسے طریق کا وجود ہو، (۱) اور (۲) کے درمیان عہ کے حاصل اسقاط میں شریک ہوگا لیکن یہ طریق عام طور پر دئے ہوئے منحنیوں کو صحیح معنوں میں "مس" نہیں کرتا۔ اس امر کی پوری تحقیق اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن ایک سادہ سی مثال یہاں دیجاتی ہے۔*

---

* تفرقی مساوات کی کتابوں میں یہ بحث "نادر حل" کے باب کی ضمن میں ملے گی۔

ذیل کے قبیل پر غور کرو۔

$ر (ما - عہا)^2 = لا^2 (لا + ب)$ .... (۸)

۳۴۹ دفعہ ۱۱۹ سے ظاہر ہے کہ نقطہ (۰، عہا) پر عقدہ ہے، قرن ہے یا اکیلا نقطہ ہے بموجب اسکے کہ ب مثبت ہے، صفر ہے یا منفی۔ لفاف معلوم کرنیکے عمل سے حاصل ہوتا ہے ما - عہا = ۰، اس لئے

$لا^2 (لا + ب) = ۰$ .... (۹)

خط لا = ۰ سے نادر نقطوں کا طریق حاصل ہوتا ہے جو اصلی منحنیوں کو مس نہیں کرتا۔ بخلاف اس کے خط لا = - ب مس کرتا ہے (اگر ب صفر نہ ہو) ہندسی بحث میں یہ مان لیا گیا تھا کہ پ کے عین پڑوس میں منحنیات عہا، عہا، کا کوئی اور تقاطع نہیں ہے۔ عقدہ کی صورت میں عام طور پر دو متصل تقاطع ہونگے جن کے لا، محدود (مثلاً) بالترتیب اِن شکلوں کے ہونگے ف (عہا، عہا) اور ف (عہا، عہا) لیکن ف (عہا، عہا) متبدلوں عہا، عہا کا متشاکل تفاعل نہیں ہے اس لئے یہ استدلال عقدوں کے طریق پر عائد نہیں ہوتا۔ نیز قرن کی صورت میں، عہا یا عہا کے لاانتہا چھوٹے تغیر کی وجہ سے نقطہ پ کا ہٹاؤ شکل ۱۱۵ میں رتبہ اول کا نہیں ہوگا اور عام طور پر نقطے پ اور پ دونوں پ کے ایک ھی جانب ہوتے ہیں۔ اکیلے نقطہ کی پڑوس میں متصل منحنیات کا کوئی حقیقی تقاطع نہیں ہوتا۔

۱۴۲ - برپیچہ۔ منحنی کا برپیچہ (Evolute) اس کے

مرکز انحنا کا طریق ہوتا ہے اور چونکہ مرکز انحنا (دفعہ ۱۳۳) دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے برپیچہ دیئے ہوئے منحنی کے عمادوں کا لفاف ہے۔ اسلئے ابتدائی منحنی کے عماد برپیچہ* کے مماس ہوتے ہیں۔

---

* ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۴۱ کے آخر کی مستثنے صورتیں خط مستقیم کے لفاف میں پیدا نہیں ہوتیں۔

مثال ۱ - قطع مکافی　　ما^۲ = ۴ ا لا .... (۱)

میں　لا = ا مم^۲ سا ، ما = ۲ ا مم سا .... (۲)

اور (دفعہ ۱۳۴ مثال ۴) سے

ر = - ۲ ا / جب^۳ سا .... (۳)

اس لئے انحنا کے مرکز کے محدد یہ ہیں

ضا = لا - ر جب سا = ۳ لا + ۲ ا
عا = ما + ر جم سا = - ما^۳ / ۴ ا^۲ .... (۴)

اسلئے　عا^۲ = ما^۶ / ۱۶ ا^۴ = ۴ لا^۳ / ا = ۴/۲۷ (ضا - ۲ ا)^۳ / ا

پس برپیچہ نیم کعبی مکافی ہے　ا عا^۲ = ۴/۲۷ (لا - ۲ ا)^۳ .... (۵)

۲۵۰

شکل (۱۱۶)

بطرز دیگر۔ مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ عماد کی مساوات کی یہ شکل ہے

$$\text{ما} = \text{م}\,(\text{لا} - ۲\text{ا}) - \text{ا}\,\text{م}^{3} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس کا لفافہ معلوم کرنے کے لئے بلحاظ م کے جزوی تفرق لو اور حاصل کرو

$$\text{لا} - ۲\text{ا} = ۳\text{ا}\,\text{م}^{2}\ ،\ \text{ما} = ۲\text{ا}\,\text{م}^{3} \quad \ldots\ldots (۷)$$

م کے ساقط کرنے سے نتیجہ (۵) حاصل ہوتا ہے۔ منحنی شکل ۱۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۲۔ ناقص $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جم فہ}\ ،\ \text{ما} = \text{ب}\ \text{جب فہ}$ .... (۸)

کے کسی نقطہ پر عماد ہے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم فہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}} = \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2} \quad \ldots\ldots (۹)$$

بلحاظ فہ کے تفرق کرنے سے

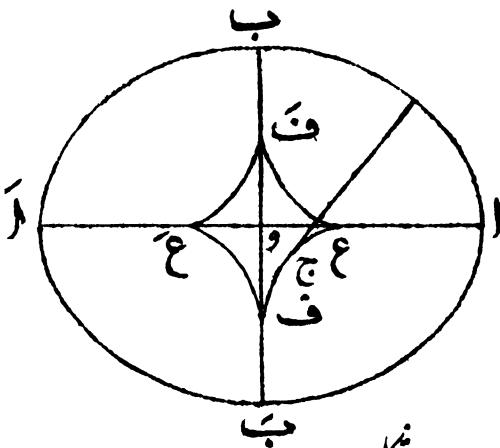
$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم}^{3}\,\text{فہ}} = -\frac{\text{ب ما}}{\text{جب}^{3}\,\text{فہ}} = \text{لہ}\ (\text{فرض کرو}) \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

(۹) میں درج کرنے سے $\text{لہ} = \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}$ .... (۱۱)

اس لئے مرکز انحنا کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ا}}\,\text{جم}^{3}\,\text{فہ}\ ،\ \text{ما} = -\frac{\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{ب}}\,\text{جب}^{3}\,\text{فہ} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

شکل (۱۱۷)

۳۵۱ اور برپیچہ ہے (ارلا) + (ب طا) = (ا‌ر - با) ...... (۱۳)

یہ منحنی جو ستارہ نما سے قائم ظل کے ذریعہ حاصل ہو سکتا ہے شکل ۱۱۷ میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط ا، ب، ا‌ب پر انحنا کے مرکز بالترتیب ہیں

ع، ف، عَ، فَ

مثال ۳۔ خط تدویر کا برپیچہ دریافت کرو۔

خط تدویر ا پ د (شکل ۱۱۸) کے کسی نقطہ پ پر دفعہ ۱۴۳ مثال ۲ کی رو سے

ر = ۲ پ ے ...... (۱۴)

محور ا ب کو دَ تک اتنا بڑھاؤ کہ ب دَ = ا ب اور حت ے کو بڑھاؤ کہ یہ دَ میں سے گذرنیوالے، ب ے کے متوازی خط سے ےَ پر ملے۔
ے ےَ کے قطر پر دائرہ کھینچو اور پ ے کو اتنا بڑھاؤ کہ دائرہ کے محیط سے یہ پَ پر ملے تو پَ ے = پ ے، پس پَ خط تدویر کے نقطہ پ پر مرکز انحنا ہے۔ چونکہ قوس پَ ےَ قوس ت پ کے مساوی ہے اور اس لئے ب ے اور دَ ےَ کے مساوی ہے اسلئے پَ کا طریق صریحاً ایک خط تدویر ہے جس کا مکون دائرہ ے پَ ےَ ہے جو دَ ےَ کے نچلے پہلو پر لڑکتا ہے اور مرسم نقطہ دَ سے لڑکنا شروع ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط تدویر کا برپیچہ ایک مساوی خط تدویر ہے اور اس کا قرن دَ پر ہے۔

نیز دفعہ ۱۲۲ (۴) سے ظاہر ہے کہ تدویری قوس

پَ د = ۲ ے پَ = پ پَ

اس لئے قوس دَ پَ + پَ پ = مستقل ...... (۱۵)

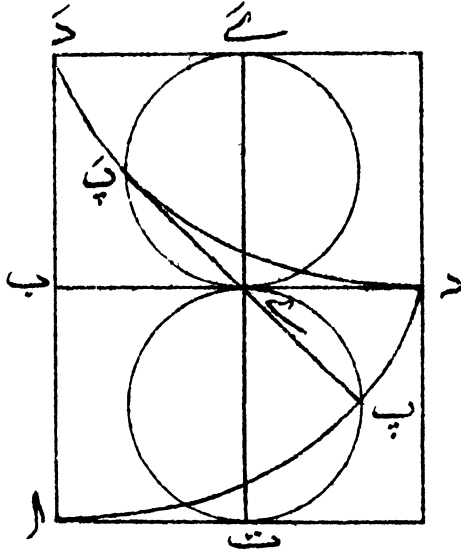
اس لئے شکل ۱۱۸ کی نچلی تدویر اوپر کی تدویر کا درپیچہ (دفعہ ۱۴۴) ہے*

۳۵۲ جب کبھی ایک منحنی کی مساوات ع اور سا کے رشتہ سے متعین ہو سکے مثلاً

* یہ مثال تدویری رقاص کے نظریہ کی ضمن میں تاریخی نقطہ نظر سے مشہور ہے۔ یہ نتائج ہائی گنز (Huyghens ۱۶۷۳) کے ساتھ منسوب ہیں۔

ع = ف (سا) .... (۱۶)

تو برپیچہ اس مساوات

ع = فَ (سا) .... (۱۷)

شکل (۱۱۸)

سے حاصل ہوگا بشرطیکہ (۱۷) میں یہ فرض کرلیا جائے کہ سا کا مبدأ ایک قائمہ میں سے آگے کو ہٹا دیا گیا ہے۔ شکل ۱۰۸ صفحہ (۴۶۲) کے حوالہ سے یہ بالکل واضح ہوگا کیونکہ برپیچہ کے مماس پر مبدأ سے عمود و ع = پ سے = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}$ جبکہ اصلی منحنی کے رموز استعمال کئے جائیں۔

مثال ۴۔ بریادرتدویر کا برپیچہ دریافت کرو۔

شکل ۱۰۱ صفحہ (۴۰۷) میں اگر و سے ت پ پر جو برتدویر کا نقطہ پ پر مماس ہے عمود ع نکالا جائے تو

ع = وت جم پ سے ج = (ا+۲ب) جم $\frac{\text{فہ}}{۲}$

یا $ع = (ا + ۲ ب) جم \frac{ا}{ا + ۲ ب} سا$ ...... (۱۸)

اگر سا کا مبدأ رأس کی بجائے قرن کے جواب میں ہو تو زاویہ کی جیب التمام کی بجائے جیب رکھنا ہوگی۔

اس لئے برپیچہ کی صورت میں

$ع = - ا جب \frac{ا}{ا + ۲ ب} سا$ ...... (۱۹)

۲۵۳ جیسے سا کے مبدأ کی درستی سے (۱۸) کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ برپیچہ متشاکل برتدویر ہے جس کے ابعاد اس نسبت $\frac{ا}{ا + ۲ ب}$ سے کم کردئے گئے ہیں۔

درتدویر کے لئے صرف ب کی علامت کو بدل دینا ہے۔*

۱۴۳ - برپیچہ کی قوس - کسی منحنی کے کسی دو نقطوں پر انحنا کے نیم قطروں کا فرق برپیچہ کے متناظر نقطوں کے درمیان کی قوس کے مساوی ہے۔

اس کے ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور پ۱ کے عماد ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں، اور ج اور ج۱ متناظر

---

* معائنہ کے بعد معلوم ہوتا ہے کہ مساوات $ع = ج جم م سا$ یا $ع = ج جب م سا$ بالترتیب "مدبر" یا درتدویر کو تعبیر کرتی ہے بموجب اسکے کہ م $<$ ۱ بشرطیکہ دفعہ ۱۲۳ کی تعریف کے مطابق گرو تدویروں کو برتدویروں میں شامل کر لیا جائے۔

بلحاظ مرکز کے "مدبر" یا درتدویر کا پائیں منحنی خاص طرز کا بر دوریہ ہے جس کی طرف دفعہ ۱۲۵ مثال ۲ میں اشارہ کیا گیا ہے شکل ۹۲ چہار

انحنا کے مرکز ہیں۔
دفعہ ۱۴۱ کی رو سے ج ج ج بالعموم منفرجہ زاویہ والا مثلث ہے اور جب پ کو پ کے لاانتہا قریب لیا جائے تو ج ج + ج ج آخرالامر ج ج کے ساتھ نسبت تساوی رکھتا ہے۔
نیز چونکہ ج سے منحنی پر کے متحرک نقطہ کا فاصلہ نقطہ پ پر اقل قیمت رکھتا ہے اس لئے ج پ اور ج پ کے درمیان فرق آخرالامر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور اس لئے نظرانداز ہو سکتی ہے۔ اس لئے

ج پ۱ - ج پ = ج ج + ج ج = ج ج

شکل (۱۱۹)

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ابتدائی منحنی کا نیم قطر انحنا ر ہو اور بریچیہ کی قوس صہ تو آخرالامر مف ر = مف صہ یا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر صہ}} = ۱ \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

پس تکمل سے ر = صہ + م .... (۲)
جہاں م اختیاری مستقل ہے جو صہ کی پیمائش کے مبدأ پر منحصر ہے۔
بطرز دیگر دفعہ ۱۳۲ کی مساواتوں

ضا = لا - ر جب سا، عا = ما + ر جم سا ......(۳)

قرنوں والے بردوریہ کے پائیں منحنی کو تعبیر کرتی اور شکل ۹۴ چار قرنوں والے در تدویریہ پائیں کو۔

کے تفرق سے

$$\frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}} = -\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}\text{جب سا}،\ \frac{\text{فرعا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}\text{جم سا} \ldots (۴)$$

۳۵۴

کیونکہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم سا}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{جب سا}؛\ \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{1}{ر}$

اس لئے $\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = -\text{مم سا} \ldots\ldots (۵)$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ برپیچہ کا مماس ابتدائی منحنی کا عماد ہے اور

$$\frac{\text{فرصہ}}{\text{فرس}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرس}}\right)^2\right\}} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} \ldots (۶)$$

تکمل کرنے پر اس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

خط تدویر کی صورت میں یہ خاصیت اس سے قبل دفعہ ۱۴۲ (۱۵) میں حاصل کی گئی ہے۔

اوپر کے مسئلہ سے یہ ایک عجیب نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ منحنی کے متصل نقطوں کے انحنا کے دائرے عام طور پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ اسکی وجہ یہ ہے۔ مرکزوں کے درمیان کا فاصلہ برپیچہ کا وتر ہے اور اسلئے عام طور پر متناظر قوس سے کم ہوتا ہے یعنی نیم قطروں کے فرق سے کم رہتا ہے۔

نیز اگر منحنی کی ذاتی مساوات یہ ہو

$$\text{س} = \text{ف}(\text{سا}) \ldots\ldots (۷)$$

تو $\text{صہ} = ر + م = \text{ف}'(\text{سا}) + م \ldots\ldots (۸)$

اگر سا کا مبدأ بقدر ایک قائمہ کے بدل دیا جائے تو یہ برپیچہ کی ذاتی مساوات ہوگی۔ جمع کیا ہوا مستقل حذف کر دیا جاسکتا ہے اگر صہ کے مبدأ کا مناسب انتخاب کیا جائے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص کے محور ا، ب ہیں۔ ان محوروں کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب $\frac{ب^2}{ا}$ اور $\frac{ا^2}{ب}$ ہیں، اس لئے جن چار حصوں میں برپیچہ کے قرن

اسے تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۷۱) اُن میں سے کسی ایک کا طول ہے

$$\frac{ا^۲}{ب} - \frac{ب^۲}{ا} = \frac{ا^۳ - ب^۳}{ا ب}$$

مثال ۲۔ خط تدویر کی ذاتی مساوات ہے

س = ک جب سا .... (۹)

اور پرپچہ کی مساوات ہے

صہ = ک جم سا .... (۱۰)

اس لئے پرپچہ مساوی خط تدویر ہے جیسا کہ پہلے ثابت کیا گیا۔

۱۴۴۔ دریچے اور متوازی منحنی۔ اگر منحنی ا' ایک منحنی ب کا پرپچہ ہو تو ب' ا کا ایک دریچہ (Involute) ہوگا۔

ایک دریچہ اس لئے کہ کسی ایک منحنی کے بیشمار دریچے ہوتے ہیں۔ کسی منحنی کا دریچہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ منحنی پر ثابت نقطہ و لو اور اس کے کسی متغیر نقطہ پ پر سے مماس کی سمت میں و سے پرے طول پ ق اتنا ناپو کہ

قوس و پ + پ ق = مستقل .... (۱)

۲۵۵ دفعہ ۱۴۳ کے استدلال کو الٹنے سے یہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دئے ہوئے منحنی کے مماس ق کے طریق کے عماد ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ یہ طریق دریچہ کی تعریف بالا کو پورا کرتا ہے۔ "مستقل" کو بدلنے سے ایک ہی منحنی کے کئی دریچے حاصل ہوتے ہیں۔

عملی مثال کے طور پر ایسا خیال کرو کہ معلومہ شکل کی کسی مادی قوس پر ایک تاگا لپیٹ دیا گیا ہے اور اسی کا ایک سرا منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہوا ہے۔ رسی کے آزاد حصہ پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے وہ دریچہ منحنی ہے۔ دراصل اس نام کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔

مثال ۱۔ خط خبری زنجیرہ کا دریچہ ہے۔ دفعہ ۱۲۰۔

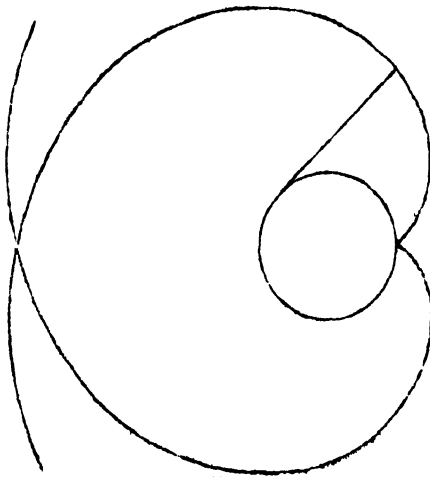
مثال ۲ - نیم قطر ا کا دائرہ ہے، اس کے دریچہ میں صریحاً

$$\frac{\text{ذ س}}{\text{ذ سا}} = \text{ر} = \text{ا سا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر سا کے مبدا کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے۔ اسلئے تکمل کرنے سے

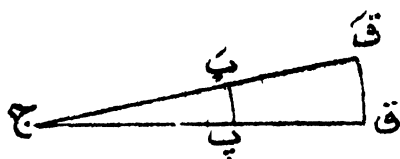
$$\text{س} = \tfrac{۱}{۲} \, \text{ا سا}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

کسی مستقل کا اضافہ کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر س کو قرن (سا = ۰) سے ناپنا شروع کیا جائے۔

(دائرہ کی) اس خاص صورت میں ظاہر ہے کہ تمام دریچے تنطابق طور پر مساوی ہیں اس لئے عام ذکر میں محض دائرہ کا دریچہ کہتے ہیں۔ یہ منحنی شکل ۱۲۰ میں دکھایا گیا ہے

شکل (۱۲۰)

اگر کسی معلومہ منحنی کے عماد پر منحنی سے شروع ہو کر ایک مستقل طول ناپا جائے تو اس طرح جو نقطہ ملیگا اس کا طریق معلومہ منحنی کا "موازی" کہلاتا ہے۔

اگر ج پ، ج پَ منحنی کے دو متصل عماد ہوں اور متوازی منحنی کے متناظر نقطے ق اور قَ ہوں تو پ ق = پَ قَ

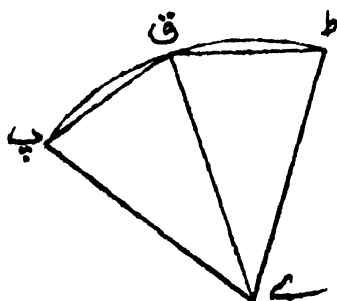
چونکہ ج پ اور ج پَ کا فرق دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے

شکل (۱۲۱)

معلوم ہوتا ہے کہ ج ق اور ج قَ کا فرق بھی ایسے ہی دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اوراس سے لئے مثلث ج ق قَ کے زاوئے ق اور قَ آخرالامر زاوئے قائمہ ہیں۔اس لئے ج ق اور ج قَ متوازی منحنی کے عماد ہیں۔

اس لئے دو متوازی منحنیات کے وہی عماد ہوتے ہیں اور وہی برعکس دوسرے الفاظ میں متوازی منحنی ایک ہی منحنی کے درپیچے ہوتے ہیں۔

برعکس اسکے یہ ظاہر ہے کہ کسی منحنی کے مختلف درپیچے متوازی منحنیات کا ایک نظام بناتے ہیں۔

۱۴۵۔ متحرک شکل کا فوری مرکز۔ کوئی شکل ہے جسکی بناوٹ میں تغیر واقع نہیں ہوتا' اپنی سطح میں ایسی شکل کی انتقالیت یا (ہٹاؤ) کا نظریہ ٹھیک طور پر حرکیات سے متعلق ہے' لیکن اسکے چند ہندسی استعمال دلچسپ ہیں۔

اس نظریہ کا پہلا مسئلہ یہ ہے۔ایسا کوئی ہٹاؤ ایک ایسے گھماؤ کے معادل ہے جو کسی محدود یا لامحدود فاصلہ پر کے ایک ایسے نقطہ کے گرد وقوع پذیر ہوتا۔

شکل (۱۲۲)

ذیل میں اس کا ایک ثبوت درج ہے۔ پہلے محل میں شکل کے کوئی دو نقطے ا ب ہیں دوسرے محل میں وہی دو نقطے

اَ ب پر ہیں، کسی تیسرے نقطہ کا نیا مقام پ جو ابتدا میں پ پر تھا
مثلث اَ پ ب بنانے سے معلوم ہوتا ہے جو مثلث اَ پ ب کے
بالکل منطابق ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ متحرک شکل کا مقام معین
کرنیکے لئے صرف دو نقطوں کے مقامات کا تعین کافی ہے۔
اب شکل کے کوئی سے نقطہ پر غور کرو، فرض کرو کہ پ اس کا ابتدائی
اور ق آخری مقام ہے اور شکل کے اُس نقطہ کا مقام ط ہے جو ابتدا میں
ق پر تھا۔ چونکہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط کے دو محل ہیں اسلئے
وہ باہم مساوی ہیں۔ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ے ہو تو مثلث
پ ے ط، ق ے ط منطابق ہیں یعنی نقطہ ے دونوں محلوں
میں وہی نقطہ ہے۔ اس لئے ہٹاؤ ے کے گرد گھماؤ کے معادل ہے،
اس نقطہ کو "گھماؤ کا مرکز" کہتے ہیں۔ ۳۵۷
ایسا ہو سکتا ہے کہ پ ق اور ق ط ایک ہی خط مستقیم میں ہوں،
ہٹاؤ ایسی صورت میں بغیر گھماؤ کے شکل کے محض نقل مکان کے معادل ہوگا
یا دوسرے الفاظ میں یہ کہا جا سکتا ہے کہ گھماؤ کا مرکز لا انتہا ہی پر ہے۔
اس کے بعد کسی مستوی شکل کی مسلسل حرکت پر غور کرو جو صرف اس کے
اپنے مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ شکل کے صرف دو متصل محلوں پر اپنی
توجہ محدود رکھو۔ پہلے محل سے دوسرے محل میں شکل کسی خاص مرکز کے گرد
گھماؤ کے ذریعہ لائی جا سکتی ہے۔ اس نقطہ کا انتہائی محل جبکہ شکل کے دو مقام
یا محل ایک دوسرے سے لا انتہا قریب ہوں "فوری مرکز" کہلاتا ہے۔
اگر شکل کے ایک ہی نقطہ کے دو متصل محل پ، پَ ہوں اور
گھماؤ کا متناظر زاویہ مف طہ ہو تو گھماؤ کا مرکز (ے)، ایسے خط مستقیم
پر واقع ہوگا جو پ پَ کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے اور زاویہ
پ ے پَ، مف طہ کے مساوی ہوگا۔ اس لئے اگر ے سے
محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ پ ہو تو اس کا لا انتہا چھوٹا ہٹاؤ آغرالامر ے پ
کے علی القوائم ہوگا اور ے پ × مف طہ کے مساوی ہوگا۔

اگر وقت کا عنصر بھی شریک کر لیا جائے اور شکل کے دو محلوں کے درمیاں جو وقت کا وقفہ گزرتا ہے وہ مف ت ا سے تعبیر کیا جائے تو $\frac{\text{مف طہ ا}}{\text{مف ت}}$

کی انتہائی قیمت یعنی $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ "زاویٔ رفتار" کہلاتی ہے۔ شکل کے اُس نقطہ کی رفتار جو فوری مرکز ے پر منطبق ہوتا ہے صفر ہے اور شکل کے کسی اور نقطہ پ کی رفتار ے پ پر علی القوائم ہے اور ے پ $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کے مساوی ہے۔

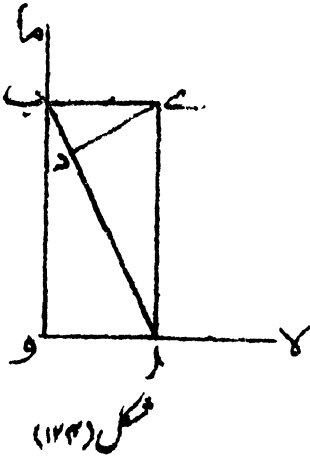
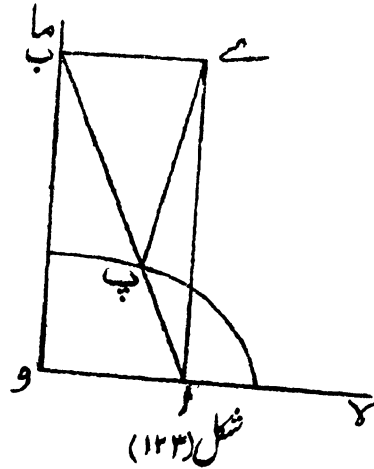
کسی مستوی شکل کی حرکت میں (جسکی وضع یا بناوٹ میں فرق نہیں آتا) مختلف نقطوں کے راستوں پر کے عماد سب کے سب فوری مرکز میں سے گذرتے ہیں۔ یہ امر ہندسی سوالات میں اکثر سود مند ثابت ہوتا ہے اگر شکل کے کسی دو نقطوں کے ہٹاؤں کی سمتیں معلوم ہوں تو فوری مرکز معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ان عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے جو ان نقطوں کی حرکت کی سمتوں پر کھینچے جائیں۔ اس کے بعد باقی تمام نقطوں کے جو ہٹاؤ ہیں ان کی سمتیں اور اضافی مقداریں متعین ہو سکتی ہیں۔

بعد ازیں متحرک شکل میں اگر کوئی خط (سیدھا یا ٹیڑھا) ہو تو ظاہر ہے کہ اس خط کے انتہائی تقاطع کا نقطہ یا نقاط اسکے متصل محل کے ساتھ صرف ان عمادوں کے پائے ہو سکتے ہیں جو فوری مرکز سے خط پر کھینچے جائیں کیونکہ خط کا کوئی اور نقطہ ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو اس کے ساتھ محدود زاویہ بناتی ہے۔

مثال ۱۔ مستقل طول کا سیدھا خط اب ہے اس کے سرے دو سیدھے علی القوائم خط و لا، و ما مرتسم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ خط پر کا کوئی نقطہ پ قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے صدری محور و لا اور و ما کی سمتوں میں ہیں۔ اوپر کے مسئلہ سے اس قطع ناقص کے

نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا عمل حاصل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے۔ و لا اور و ما پر بالترتیب عمود ا ے، ب ے کھینچو۔ ے فوری مرکز ہے اور ے پ مطلوبہ عماد ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۳۔

۳۵۸

شکل (۱۲۴) شکل (۱۲۳)

مثال ۲۔ گزشتہ مثال میں متحرک خط اب کا انتہائی تقاطع اس کے متصل مقام کے ساتھ نقطہ د ہے (شکل ۱۲۴) جو فوری مرکز ے سے خط اب پر عمود کا پایہ ہے۔ اب اگر

اب = ل ، < و اب = فہ

تو د کے محدد ہیں

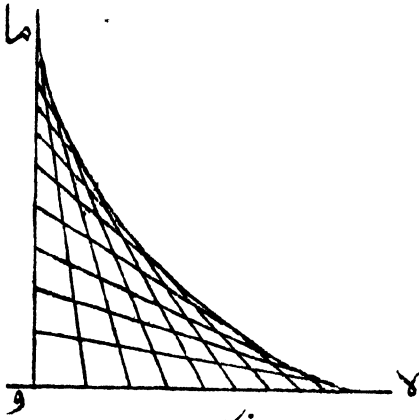
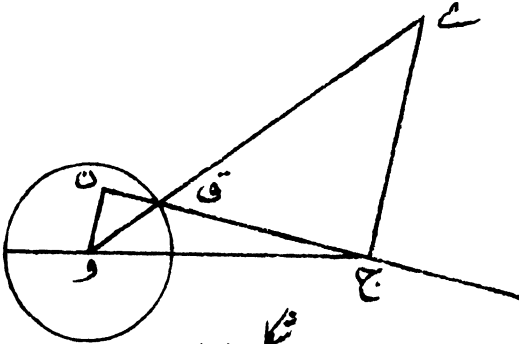
لا = ب د جم فہ = ب ے جم^{2} فہ = ل جم^{3} فہ
ما = ا د جب فہ = ا ے جب^{2} فہ = ل جب^{3} فہ ...(۱)

اس لئے اب کا لفاف ستارہ نما

لا$^{2/3}$ + ما$^{2/3}$ = ل$^{2/3}$ ....(۲)

ہے، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۴ کے ساتھ۔

شکل (۱۲۵)

۲۵۹

مثال ۳۔ ایک بازو و ق اپنے ایک سرے و کے گرد زاویٔ رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے، ق پر ایک سلاخ چول کے ذریعہ وصل کردی گئی ہے جو ایک ثابت نقطہ ج میں سے لازماً گذرتی ہے۔ اس سلاخ کی رفتار اس کے طول کی سمت میں مطلوب ہے۔

شکل (۱۲۶)

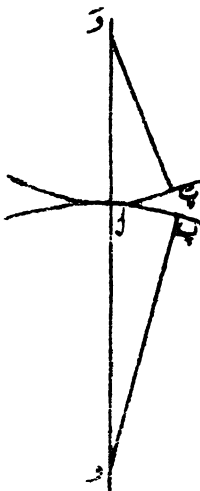
دراصل یہ تنظیم اهتزازی اسطوانہ (Oscillating cylinder) والے بھاپ انجن کے کرنیک اور فتارہ میں پائی جاتی ہے جس میں نقطہ ج اسطوانہ کے چول خط پر واقع ہوگا۔

فوری مرکز وہ نقطہ ہے جہاں و ق ممدودہ ج پر فتارہ کی سمت کے عمود دار خط کو قطع کرتا ہے۔ اگر و سے ج ق (ممدودہ بشرط ضرورت) پر عمود و ن کھینچا جائے تو سلاخ کے اس نقطہ کی رفتار جو ج پر منطبق ہوتا ہے یہ ہوگی

سہ × و ن = سہ × و ق × $\frac{\text{و ن}}{\text{و ق}}$ = سہ × و ق × $\frac{\text{ے ج}}{\text{ے ق}}$ ...(۳)

۱۴۶۔ لڑکنے والے منحنیات میں استعمال۔

دو مستوی شکلیں ہیں دونوں کی بناوٹ غیر متغیر ہے۔ دونوں شکلوں میں ایک ایک منحنی ثابت طور پر لگا ہوا ہے ایک شکل کا یہ منحنی دوسری شکل کے منحنی پر بغیر پھسلنے کے لڑکتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر شکل کا کوئی نقطہ بلحاظ دوسری شکل کے ایک منحنی مرتسم کریگا۔ منحنی جو اس طور پر مرتسم ہوا سے گردونیہ کہتے ہیں۔

جن صورتوں میں لڑکنے والے منحنی دائرے ہیں وہ دفعات ۱۲۲ تا ۱۲۴ میں زیر بحث آچکی ہیں۔

گردونیوں کا عام نظریہ علم ہندسہ اور حرکیات میں اس وجہ سے اہمیت رکھتا ہے کہ کسی شکل کی کوئی مسلسل حرکت، خود اپنی سطح مستوی میں اس حرکت پر مشتمل خیال کیا سکتی ہے کہ ایک خاص منحنی جو بلحاظ شکل کے ثابت ہے دوسرے ایک خاص منحنی پر جو بلحاظ سطح مستوی کے ساکن ہے لڑکتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۹

جب ایک مستوی منحنی ایک

شکل (۱۲۷)

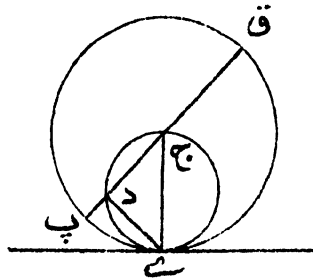
ایسے منحنی پر لڑکتا ہے جو ثابت خیال کیا جا سکتا ہے تو حرکت کا فوری مرکز نقطہ تماس ہے۔

۲۶۰ صفحہ گذشتہ کی شکل میں فرض کیا جائیگا کہ نچلا منحنی ثابت ہے۔ فرض کرو کہ ا نقطہ تماس ہے اور لاانتہا چھوٹی قوسیں اپ، اپَ (= مف س) دو منحنیوں پر بنائی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ پ اور پَ کے عماد، ا پر کے عماد سے نقاط و اور وَ پر ملتے ہیں۔ تب آخرالامر و ا = ر اور وَ ا = رَ جہاں ر اور رَ دو منحنیوں کے نیم قطر انحنا ہیں نقطہ ا پر۔ لاانتہا چھوٹے ہٹاؤ کے بعد پَ وَ، و پ کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں آجائیگا اسوقت دونوں منحنی پ پر تماس میں ہونگے۔ اس لئے زاویہ (مف طہ) جس میں سے لڑکنے والا منحنی پھریگا اور جو و پ اور پَ وَ کے درمیانی مادہ زاویہ کے مساوی ہے و اور وَ پر کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا، اسلئے آخرالامر

$$\text{مف طہ} = \frac{\text{مف س}}{ر} + \frac{\text{مف س}}{رَ} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اب وتر اپ، اپَ آخرالامر مساوی ہیں اور ان کے درمیان ا پر لاانتہا چھوٹا زاویہ بنتا ہے، اسلئے فاصلہ پ پَ آخرالامر مف س میں دوسرے رتبہ کا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب، مف س کو لاانتہا کم کیا جائے تو گھماؤ کے مرکز (سے) کا انتہائی محل ا پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ اگر یہ مرکز اس نقطہ سے محدود فاصلہ پر ہو تو پَ کا ہٹاؤ جو دفعہ ۱۴۵ کی رو سے سے پ مف طہ کے مساوی ہے مف س میں صرف پہلے رتبہ کا ہوگا۔

پس جب ایک منحنی ایک ثابت منحنی پر لڑکتا ہے تو اون سب نقطوں کے راستوں کے عماد، جو متحرک منحنی کے ساتھ تعلق رکھتے ہیں نقطہ تماس میں سے گذرتے ہیں۔ اس نتیجہ کی مثالیں اس سے قبل دفعات ۱۲۲، ۱۲۳ میں، تدویری اور استداری منحنیات کی ضمن میں آچکی ہیں۔ نیز اگر ایک خط مستقیم

کسی منحنی پر لڑھکے تو اس کے کسی نقطہ کے راستہ پر یہ خط مستقیم عماد ہوگا (دفعہ ۱۴۴)

شکل (۱۲۸)

اس کے بعد اگر ایسے خط (سیدھے یا ٹیڑھے) پر غور کیا جائے جسے لڑھکنے والا منحنی ساتھ اٹھائے پھرتا ہے تو اس سوار منحنی کے انتہائی نقاط تقاطع، اپنے متصل مقام کے ساتھ ان عمادوں کے پائے ہونگے جو نقطہ تماس سے سوار منحنی تک کھینچ سکتے ہیں۔ اور سوار خط کا لفاف ان پایوں کا طریق ہوگا۔

۳۶۱ **مثال ۱**۔ ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکتا ہو تو اس کا کوئی قطر خط تدویر کو لف کرتا ہے۔

لڑھکنے والے دائرہ کا مرکز ج ہے، ے اس کا نقطہ تماس ہے، ے د قطر پ ق پر عمود ہے۔ چونکہ د ایسے دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ج ے ہے اس لئے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر چھوٹا دائرہ ہمیشہ بڑے دائرہ کی زاوی رفتار کے دو چند سے لڑھکتا فرض کیا جائے تو ثابت خط کے ساتھ اس کا نقطہ تماس وہی ہوگا اور نقطہ د اس طرح حرکت کریگا گویا چھوٹا دائرہ اسے اٹھائے ہوے ہے۔

اس لئے اسکا طریق خط تدویر ہے۔

مثال ۲۔ اسی طرح اگر ایک دائرہ (ا) ایک ثابت دائرہ (ب) پر لڑھکتا ہو تو ا کے کسی قطر کا لفاف ایسا "بر" یا "در تدویر" ہوگا جو ا کے نصف ناپ کے دائرہ کو ب کے محیط پر لڑھکانے سے پیدا ہو سکتا ہے۔

۱۴۷۔ نقطہ گردونیہ کا انحنا۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ بلحاظ لڑھکنے والے

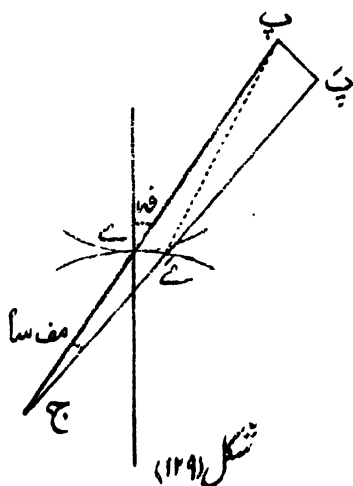
منحنی کے ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ کے راستہ کا انحنا معلوم کرنیکے لئے فرض کرو کہ ے نقطہ تماس ہے اور ےَ متصل نقطہ تماس ہے اور پَ، پ کا متناظر مقام ہے۔

چونکہ لڑھکنے والے منحنی کا جو نقطہ ےَ پر آتا ہے اسکا ہٹاؤ دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے جس زاویہ میں سے شکل گھوم جاتی ہے وہ انتہائی صورت میں ہے

مف طہ = ∠ پ ےَ پَ ....(۱)

فرض کرو کہ پ کے راستہ کے عماد پ ے اور پَ ےَ خارج ہوکر ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ مف سا ہے تو

مف سا = ∠ ے ج ےَ = (مف س × جم فہ) / ج ے ....(۲)

جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو ے پ، ےَ پر کے عماد کے ساتھ بناتا ہے

شکل (۱۲۹)

نیز شکل سے مف سا = ∠ پ ےَ پَ - ∠ ے پ ےَ

$$= \text{مف طہ} - \frac{\text{مف س. جم فہا}}{\text{پ ے}}$$

$$= \text{مف س} \left(\frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ} - \frac{\text{جم فہا}}{\text{پ ے}} \right) \quad \cdots\cdots (۳)$$

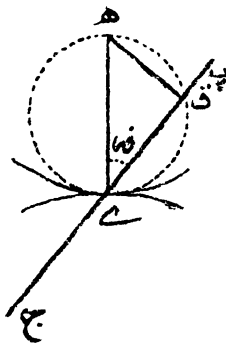
دفعہ ۱۴۶ (۱) کی رو سے اگر ر اور رَ ثابت اور لڑکنے والے منحنیوں کے انحنا کے نیم قطر ہوں۔ (۲) اور (۳) کو مساوی رکھنے سے

$$\text{جم فہا} \left(\frac{1}{\text{ج ے}} + \frac{1}{\text{ے پ}} \right) = \frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ} \quad \cdots\cdots (۴)$$

اس سے ج کا انتہائی مقام یعنی پ کے راستہ کا مرکز انحنا حاصل ہوتا ہے۔ نیم قطر انحنا اس کے بعد حاصل ہوگا

$$\text{غہا} = \text{ج پ} = \text{ج ے} + \text{ے پ} \quad \cdots (۵)$$

(۴) اور (۵) میں جو نتیجہ مشتمل ہے اسے سادہ ہندسی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔ ے پر کے عماد پر طول ے ھ ایسا کاٹو کہ

$$\frac{1}{\text{ے ھ}} = \frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ} \quad \cdots\cdots (۶)$$

شکل (۱۳۰)

اور ے ھ کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ ے پ اس دائرہ کو

ق پر ملتا ہے۔ تب

$$\left(\frac{1}{ر} + \frac{1}{ر}\right) \text{قط فہا} = \frac{1}{\text{ہ جم فہا}} = \frac{1}{ےق}$$

اس لئے رشتہ (۴) یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\frac{1}{جے} + \frac{1}{ےپ} = \frac{1}{ےق} \quad \ldots\ldots\ldots(۷)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر پ، ق پر منطبق ہو جائے تو ج ے لامتناہی ہوگا یعنی متحرک شکل کا کوئی نقطہ جو اُس دائرہ پر واقع ہو جس کی ابھی تعیین کی گئی راستہ کے نقطہ انعطاف پر ہوگا۔ اس وجہ سے دائرہ زیر بحث کو "انعطافوں کا دائرہ" کہتے ہیں۔

(۷) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$جے = \frac{ےپ \times ےق}{قپ} \quad غہا = \frac{ےپ^2}{قپ} \quad \ldots\ldots(۸)$$

آخیر کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ غہا، ق پ کے ساتھ علامت بدلتا ہے یعنی متحرک شکل کے مختلف نقطوں کے راستے ے کی جانب مقعر یا محدب ہیں بموجب اسکے کہ وہ انعطافوں کے دائرہ کے ایک جانب واقع ہیں یا دوسری جانب۔ اوپر کی معیاری صورت میں یہ راستے ے کی طرف مقعر ہیں اگر پ دائرہ کے باہر ہو اور محدب ہیں اگر پ اندر ہو۔

۳۶۳ استمراری منحنیات سے جو دفعہ ۱۲۲ صفحہ (۴۰۳) پر دیے گئے ہیں اسکی ایک مثال اس پر آتی ہے۔ اس صورت میں انعطافوں کا دائرہ لڑھکنے والے دائرہ کے ناپ کا آدھا ہے۔

ہم نے معیاری صورت وہ لی ہے جس میں دو منحنی بلحاظ ایک دوسرے کے محدب ہیں دیکھو اشکال ۱۲۷، ۱۲۹۔ اور کوئی صورت ر اور رَ کو مناسب علامات دینے سے اوپر کے نتائج میں شریک کر لیجا سکتی ہے۔
سکونیات میں "جھولنے والے پتھروں" کی حرکت میں اوپر کا نظریہ

استعمال ہوتا ہے۔ جب ایک کھردرا جسم فقط ایک نقطہ تماس کے ذریعہ دوسرے جسم پر ساکن ہوتا ہے تو اس کا مرکز ثقل انتصابًا نقطہ تماس کے اوپر واقع ہوتا ہے اور توازن کے قائم ہونیکے لئے یہ ضروری ہے کہ مرکز ثقل کا راستہ، کسی لڑکنے کے ہٹاؤ کی صورت میں، اوپر کی جانب مقعر ہو۔

مثال ۱۔ خط تدویر میں اگر مکون دائرہ کا نیم قطر ا ہو تو

ر = ∞، رَ = ا، ے پ = ۲ ا جم فما

(۴) میں درج کرنے سے

ج ے = ۲ ا جم فما = ے پ ....(۱۰)

اس لئے غما = ۲ ے پ ....(۱۱)

مثال ۲۔ بر تدویر (دفعہ ۱۲۳) میں

ر = ا، رَ = ب، ے پ = ۲ ب جم فما ....(۱۲)

جس سے ج ے = $\frac{۲ اب}{ا + ۲ب}$ جم فما = $\frac{ا}{ا + ۲ب}$ ے پ....(۱۳)

غما = $\frac{۲ (ا + ب)}{ا + ۲ب}$ ے پ ....(۱۴)

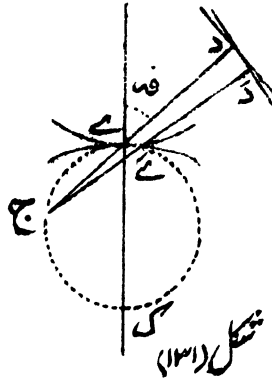
یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ب = - $\frac{ا}{۲}$ تو غما = ∞، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ کے ساتھ۔

۱۴۸۔ خط گرودنیہ (Line Roulette) کا انحنا۔ خط گرودنیہ کا

انحنا یعنی ایک ایسے خط مستقیم کے لفاف کا انحنا جسے لڑکنے والا منحنی اٹھائے پھرتا ہے، زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ خط کے دو متصل مقامات پر، فوری مرکز کے متناظر مقامات سے (جو فضا میں ہیں) عمود مے د، مے دَ نکالے گئے ہیں، یہ لفاف کے عماد ہیں اور جو زاویہ یہ اپنے تقاطع (ج) پر ایک دوسرے سے بناتے ہیں وہ گھماؤ کے زاویہ معف طما کے مساوی ہے

اگر ے د لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر کے عماد س کے ساتھ زاویہ فا بنائے اور سے ہے = مف س تو انتہائی صورت میں

مف س جم فا = ج سے مف طا . . . . . . (۱)

شکل (۱۳۱)

۳۶۴ اس لئے دفعہ ۱۴۶ (۱) سے مف طا کی قیمت درج کرنے سے

$$\frac{\text{جم فا}}{\text{ج ے}} = \frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ} \quad \ldots\ldots (۲)$$

لفاف کا نیم قطر انحنا حاصل ہوگا۔

غا = ج سے + سے د . . . . . . (۳)

لڑکنے والے منحنی کے نقطہ ے پر جو عماد ہے اوس پر طول ے ک ایسا نالو کہ

$$\frac{1}{\text{ے ک}} = \frac{1}{ر} + \frac{1}{رَ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

دفعہ گذشتہ میں ناپنے کی جو سمت ہے اسکی مخالف سمت یہ طول نپایا جائے۔ ے ک کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ (۲) سے ظاہر ہے کہ ج اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں لڑکنے والے

منحنی کے کسی معلومہ مقام کے لئے تمام خط گردونیوں کے انحنا کے مرکزوں کا طریق ایک دائرہ ہے۔ اور جب برداشتہ خط ک میں سے گذرے تو د، ج پر منطبق ہوگا اور ج لفاف پر ساکن نقطہ (دفعہ ۱۳۲) ہوگا۔ اوپر کے دائرہ کو اس لئے قرنوں کا دائرہ کہا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر خط تدویر کو ایسے دائرہ کے ایک قطر کا لفاف خیال کیا جائے جو ایک ثابت خط مستقیم (دفعہ ۱۴۶ مثال ۱) پر لڑکتا ہے تو یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نیم قطر انحنا عماد کا دوچند ہے۔

مثال ۲۔ "برتدویر" کو ایک ایسے دائرہ کے قطر کا لفاف سمجھکر جو ایک اور ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے تکوین کی گئی ہے، تب دفعہ ۱۴۳ کی ترقیم کے مطابق س = ا، س = ۲ب اور اسلئے (۲) سے

$$ج ے = \frac{۲ اب}{ا + ۲ب} جم فا = \frac{ا}{ا + ۲ب} ے د$$

جو دفعہ ۱۴۷ مثال ۲ کے مطابق ہے۔

۱۴۹۔ کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں۔

کوئی مستوی شکل اپنی مستوی سطح میں متحرک ہے، اسکے مختلف محلوں کے مسلسل سلسلہ پر غور کرو۔ فوری مرکز کا فضا میں ایک خاص طریق (لوکس) ہوگا اور شکل کے اندر بھی ایک خاص طریق ہوگا۔ ایسے منحنیوں کو جنکی اوپر تعریف ہوئی مرکز طریق کہتے ہیں، اول الذکر کو ہم فضائی مرکز طریق کہینگے اور موخر الذکر کو جسمی مرکز طریق۔ جس مسئلہ کا دفعہ ۱۴۶ میں حوالہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ شکل کی کوئی معلومہ حرکت جسمی مرکز طریق کے فضائی مرکز طریق پر بغیر پھسلنے کے لڑکنے سے پیدا ہوسکتی ہے۔

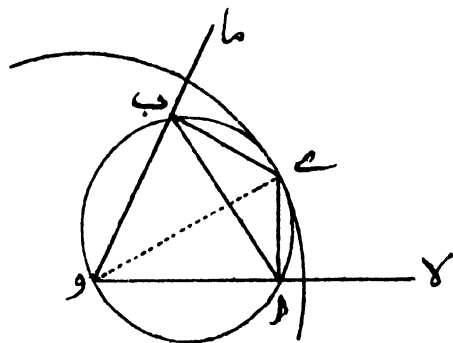
شکل کے کسی معلومہ محل پر غور کرو، فرض کرو کہ ے اس کا فوری مرکز اور ے، ذ، بالترتیب متصل متناظر نقطے ہیں جسمی مرکز طریق اور فضائی مرکز طریق پر۔

فرض کرو کہ جسم زاویہ مف طہ میں سے گھومتا ہے جیسے فوری مرکز ے سے ژ پر چلا جاتا ہے۔

۳۶۵

تب انتہائی صورت میں دفعہ ۱۴۵ کی رو سے

ے ےَ = ے ژ اور ےَ ژَ = ے ےَ مف طہ

اس لئے زاویہ ےَ ے ژ انتہا میں معدوم ہو جاتا ہے اور ے پر دونوں طریقوں کے مماسی خط ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور دونوں منحنیات کی متناظر عنصری قوسیں نسبت تساوی میں ہوتی ہیں۔

شکل (۱۳۲)

مثال - مستقل طول کا خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت خطوط مستقیم ولا، وما پر رہتے ہیں۔

فوری مرکز ے، ولا، وما پر کے عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے جو بالترتیب نقاط ا اور ب پر کھینچے جائیں۔ نقاط ا اور ب ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا قطر و ے ہے اور چونکہ اس دائرہ میں دئے ہوے طول کا وتر اب محیط پر ایک مستقل زاویہ اوب بناتا ہے اس کا قطر متعین ہو سکتا ہے اسلئے ے کا فضائی طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے۔ نیز چونکہ زاویہ اے ب مستقل ہے اسلئے ے کا طریق بلحاظ اب کے ایک دائرہ ہے جس کا قطر و ے کی مستقل قیمت کے مساوی ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث،

ایک دائرہ کے دوسرے ثابت دائرہ کے اندر جس کا ناپ دو چند ہے لڑھکنے کے معادل ہے۔ ایسی حرکت پر دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ میں بحث کی گئی ہے اور یہ دکھایا گیا ہے کہ کوئی نقطہ پ جو بلحاظ اب کے ثابت ہے قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جو بعض صورتوں میں جبکہ پ لڑھکنے والے دائرہ کے محیط پر واقع ہو، ایک خط مستقیم میں بگڑ کر رہ جاتا ہے۔

۱۵۰- بردوریوں کی بطور گردونیوں کے دوہری تکوین

مزید مثال کے طور پر ہم یکساں دائری حرکتوں کو جوڑ دار متوازی الاضلاع و ق پ قَ کے ذریعہ جس کا دفعہ ۱۲۵ میں حوالہ دیا گیا ہے ترکیب دینے کے حیلی طریقہ کی طرف عود کرتے ہیں۔

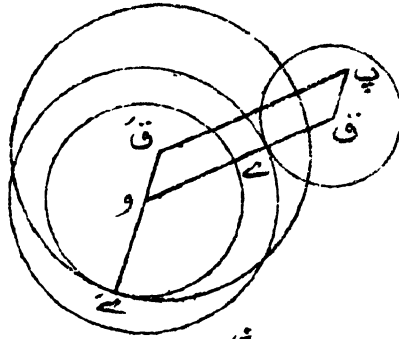
تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ سلاخوں و ق، و قَ کی زاوی رفتاریں ن، نَ ایک ہی علامت رکھتی ہیں۔

سلاخ قَ پ کا فوری مرکز (ے) ایسا نقطہ، ق و میں ہوگا کہ

نَ × قَ ے = ن × و ق ....(۱)

کیونکہ کسی ایسے نقطہ کی رفتار جو قَ پ کے ساتھ استوار طور پر لگا ہوا ہے مشتمل ہوگی انتقالیت ن × و ق پر جو و ق کے علی القوائم ہے اور ایسے گھماؤ پر جو قَ کے لحاظ سے زاوی رفتار نَ سے عمل میں آتا ہے۔ اس لئے شرط بالا کے ماتحت ایسے نقطہ کی رفتار جو قَ پ کے ساتھ لگا ہوا ہے اور آن زیر بحث میں نقطہ ے پر ہے صفر ہوگی۔ اسلئے سلاخ قَ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرق ہیں جو و اور ق کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور ے میں سے گزریں۔

اسی طرح کے استدلال کی بنا پر سلاخ قَ پ کا فوری مرکز (ےَ) ایسا نقطہ، قَ و میں ہوگا کہ

ن × قَ ے = نَ × وقَ ......(۲)*

شکل (۱۳۳)

پس سلاخ قَ پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرفی دائرے ہونگے جنکے مرکز و اور فَ ہونگے اور جو ے میں سے گذرینگے۔

چونکہ نقطہ پ دونوں سلاخوں فَ پ اور قَ پ پر واقع ہے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی سیدھا یا راست بردوریہ بطور براستداری کے دو طرح سے مرتسم ہو سکتا ہے۔

اس خاص صورت میں جبکہ فَ پ = قَ ے، (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

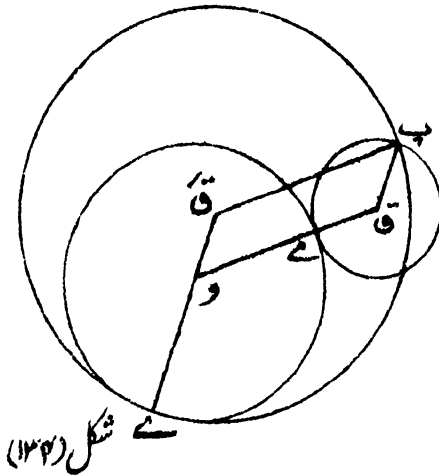
قَ پ : وقَ = ق ے : وق = ن : نَ = وقَ : قَ ے = قَ پ : قَ ے

جس سے قَ پ = وقَ = قَ ے

پ کا راستہ اس صورت میں بردویر ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بردویر کی دو طرح سے تکوین ہو سکتی ہے یعنی دو معین دائروں میں سے

* شکل ۱۳۳ ایسی صورت کے لئے کھینچی گئی ہے جبکہ نَ > ن۔ اگر نَ < ن تو ے قَ و ممدودہ پر واقع ہوگا اور ے نقاط قَ اور و کے درمیان۔

کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے باہر لڑ کانے سے* دیکھو شکل ۱۳۴۔ مثال کے طور پر خط صنوبری (Cardioid) کی جس کا ذکر دفعہ ۱۲۴ مثال ۱/۳ میں پہلے آیا ہے، دوہری تکوین دی جاتی ہے۔ ۳۶۷

شکل (۱۳۴)

جس صورت میں زاوی رفتاروں ن، نَ کی علامتیں مختلف ہوں اسے طالب علم کے معائنہ کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ کسی اُلٹے یا رجعی بردوریہ کی بطور ایک دراستداری خط کے، دو الگ طریقوں سے تکوین ہو سکتی ہے اور بالخصوص کسی در تدویر کی تکوین دو قابل تعیین دائروں میں سے کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے اندر لڑ کانے سے عمل میں آسکتی ہے۔

امثلہ ۴۶

انحنا

۱۔ ثابت کرو کہ دائرہ ہی ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے۔

---

* یہ یولر (۱۷۸۱) کا مسئلہ ہے۔

۲ـ ثابت کروکہ منحنی کے کسی نقطۂ (لا، ما) پر انحنا کے مرکز کے محدد اس شکل میں رکھے جا سکتے ہیں

$$لا - \frac{فرما}{فرسا} \text{، } ما + \frac{فرلا}{فرسا}$$

۳ـ ثابت کروکہ مساوی الزاویہ لولبی کی ذاتی مساوات اس شکل کی ہے

$$س = ا قو^{سا مم عہ}$$

۴ـ ثابت کروکہ خط جرّی کی ذاتی مساوات اس شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$س = ر لوک قم سا$$

ثابت کروکہ اس منحنی میں انحنا ایسے بدلتا ہے جیسے عماد ـ

۵ـ ان ضابطوں $\frac{فرلا}{فرس} = جم سا \text{، } \frac{فرما}{فرس} = جب سا$

۲۶۸

کے تفرق سے ثابت کروکہ $\frac{1}{ر} = - \frac{فر^2 لا}{فرس^2} \Big/ \frac{فرما}{فرس} = \frac{فر^2 ما}{فرس^2} \Big/ \frac{فرلا}{فرس}$

اور $\frac{1}{ر^2} = \left(\frac{فر^2 لا}{فرس^2}\right)^2 + \left(\frac{فر^2 ما}{فرس^2}\right)^2$ جہاں ر نیم قطر انحنا ہے

۶ـ اگر ایک منحنی کا ان مساواتوں سے تعین ہو

$$لا = فا(ت) \text{، } ما = ف(ت)$$

تو ثابت کروکہ $\frac{1}{ر} = \frac{لاَ ماً - ماَ لاً}{(لاَ^2 + ماَ^2)^{\frac{3}{2}}}$ جہاں زبروں سے تفرق بلحاظ ت کے تعبیر ہوتا ہے ـ

۷ـ اوپر کا ضابطہ قطع ناقص لا = اجم فا، ما = ب جب فا اور قطع زائد لا = اجمز ع، ما = ب جبز ع کی صورت میں لگاؤ ـ

۸ـ ایک منحنی کی کارٹیزی مساوات دی ہوئی ہے، بتاؤ کہ اسکے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) کس طرح اس کے میلان (سا) کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں

اور ثابت کرو کہ

$$ر = \sqrt{\left(\frac{فرلا}{فرسا}\right)^{۲} + \left(\frac{فرما}{فرسا}\right)^{۲}}$$

۹— جس منحنی کی ذاتی مساوات س = م جب سا ہے ثابت کرو کہ وہ خط تدویر ہے (دفعہ ۱۲۰ (۳) کا طریقہ استعمال کرو)

۱۰— "مساوی مضبوطی کے زنجیرہ" کی صورت میں معلوم ہے

$$ر = م \text{ قط سا } (م \text{ مستقل})$$

جہاں سا مماس کا میلان ہے افق کے ساتھ، ثابت کرو کہ اگر مبدا سب سے نچلے نقطہ پر ہو تو لا = م سا، ما = م لوک قط سا جہاں محور لا اور ما بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔

۱۱— ایک منحنی کی ذاتی مساوات دی گئی ہے س = م جب^{۲} سا (م مستقل)، اسکی کارتیزی مساوات حاصل کرو

$$لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = \left(\frac{۲}{۳}م\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

۱۲— اگر $ر = \frac{ا^{۲}}{ما}$ تو ثابت کرو کہ $ما^{۲} = م ر - ۲ا^{۲} \text{ جم سا}$

۱۳— وہ منحنی دریافت کرو جسکی ذاتی مساوات ہے س = ا قط^{۳}سا $\left[ا ما^{۲} = \frac{۸}{۲۷} لا^{۳}\right]$ ۳۶۹

۱۴— اگر منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما متغیر ت کے دئے ہوئے تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^{۲}لا}{فرت^{۲}} = \frac{فر^{۲}س}{فرت^{۲}} \text{ جم سا} - \frac{۱}{ر}\left(\frac{فرس}{فرت}\right)^{۲} \text{ جب سا،}$$

$$\frac{فر^{۲}ما}{فرت^{۲}} = \frac{فر^{۲}س}{فرت^{۲}} \text{ جب سا} + \frac{۱}{ر}\left(\frac{فرس}{فرت}\right)^{۲} \text{ جم سا}$$

ان نتائج کی حرکیاتی تعبیر بیان کرو۔ اسلئے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ر}} = \left\{ \left(\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}\right)^2 \times \left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\right)^2 - \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} \right\} \div \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^4$$

۱۵- ستارہ نما لا = ا جم^3 طہ، ما = ا جب^3 طہ میں ثابت کرو کہ سا = π - طہ اور اس سے ثابت کرو کہ ر = ۳ ا جب طہ جم طہ

۱۶- اگر لا = ا ت^2، ما = ۲ ا ت تو مرکز انحنا کے محدد ہیں
ا (۲ + ۳ ت^2)، - ۲ ا ت^3

۱۷- دفعہ ۱۳۵ (۲) کے کارٹیزی ضابطہ سے ثابت کرو کہ قائم قطع زائد
لا ما = م^2 میں ر = $\frac{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{۲ م}^2}$

۱۸- نیز قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ = ۱ میں ر = $\frac{(\text{ا}^2 - \text{ز}^2\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ا ب}}$

۱۹- نیز قطع زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ = ۱ میں ر = $\frac{(\text{ز}^2\text{لا}^2 - \text{ا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ا ب}}$

۲۰- نیز قطع مکافی ما^2 = ۴ ا لا میں ر = $\frac{\text{۲ (ا + لا)}^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}}$

۲۱- نیز نیم کعبی مکافی ا ما^2 = لا^3 میں ر = $\frac{\text{لا}^{\frac{1}{2}}(\text{۹ لا + ۴ ا})^{\frac{3}{2}}}{\text{۶ ا}}$ ۳۷۰

۲۲- نیز کعبی مکافی ا^2 ما = لا^3 میں ر = $\frac{\text{ا}^2}{\text{۶ لا}}\left(\text{۱ + ۹}\frac{\text{لا}^4}{\text{ا}^4}\right)^{\frac{3}{2}}$

۲۳- نیز ستارہ نما لا$^{\frac{2}{3}}$ + ما$^{\frac{2}{3}}$ = ا$^{\frac{2}{3}}$ میں ر = -۳ (ا لا ما)$^{\frac{1}{3}}$

۲۴- ایک منحنی کے متغیر نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع ثابت نقطہ (ضا، عا) سے اس جملہ (لا - ضا)^2 + (ما - عا)^2، سے تعبیر ہوتا ہے، اس جملہ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ جب یہ فاصلہ اقل ہو تو نقطہ (لا، ما) کو لازماً اس عماد کے پایہ پر واقع ہونا چاہئے جو (ضا، عا) سے اس منحنی تک کھینچ سکتا ہے۔

نیز یہ فاصلہ اقل ہوگا اگر نقطہ (ضا، عا) مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ قریب ہو اور اعظم ہوگا اگر یہ نقطہ مرکز انحنا کی بہ نسبت منحنی سے زیادہ بعید ہو۔

۲۵۔ اگر منحنی کو ابدال لاَ = عہ لا، ماَ = بہ ما سے تحویل کیا جائے تو کسی نقطہ پر کا انحنا اس نسبت سے بدل جاتا ہے $\frac{عہ\ بہ}{(عہ^۲ جم^۲ سا + بہ^۲ جب^۲ سا)^{\frac{۳}{۲}}}$ جہاں سا ہے محور لا کے ساتھ اصلی منحنی کا میلان۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ $\frac{فر ر}{فر س} = \frac{۳\ ع\ ق^۲ - (۱ + ع^۲)\ ر}{ق^۲}$

جہاں $ع = \frac{فر ما}{فر لا}$، $ق = \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲}$، $ر = \frac{فر^۳ ما}{فر لا^۳}$

۲۷۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر انحنا $\frac{ا جم \frac{فہ}{۲}}{ر رَ}$ ہے جہاں ر، رَ ماسکی فاصلے ہیں اور فہ ان کا درمیانی زاویہ ہے۔

۲۸۔ قائم قطع زائد $ر^۲ جم ۲ طہ = ا^۲$ میں $ن = \frac{ر^۳}{ا^۲}$

۲۹۔ چشمہ منحنی

$$ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ \quad میں \quad ن = \frac{ا^۲}{۳ ر}$$

۳۰۔ منحنی $ر^م = ا^م جم م طہ$ میں $ن = \frac{ر^۲}{(م + ۱)\ ع} = \frac{ا^م}{(م + ۱)\ ر^{م - ۱}}$ ۳۷۱

۳۱۔ ضابطہ $ن = \frac{ر\ فر\ ر}{فر\ ع}$ لگانے سے بر تدویر کے کسی نقطہ پر کا نیم قطر انحنا دریافت کرو۔ (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۴۴۹)

دائرہ کے دریچہ کی صورت کا معائنہ کرو۔

۳۲۔ اگر منحنی کی مساوات اس شکل ر = ف (ع) میں دی ہوئی ہو تو قطبی میں

گذرنے والا وتر انحنا ہو گا $2ع \frac{فر ر}{فر ع}$

ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گذرنیوالا وتر انحنا سمتی نیم قطر کا $1\frac{1}{3}$ گنا ہوتا ہے۔

۴۳۔ ثابت کرو کہ قطب میں سے گذرنے والا منحنی $ر^م = ا^م$ جم م طہ کے کسی نقطہ پر کا وتر انحنا $\frac{2ر}{1+م}$ ہے۔

۴۴۔ ثابت کرو کہ منحنی ر = ف (ع) کے پائین منحنی کا انحنا بلحاظ مبدأ کے

$\frac{2}{ر} - \frac{ع}{ر^3} ی$ ہے جہاں ر، ع، ی اصلی منحنی سے متعلق ہیں۔

۴۵۔ ایک قطع ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں، ثابت کرو کہ بلحاظ مرکز کے اسکے پائین منحنی کا انحنا $\frac{3}{ر} - \frac{ا^2+ب^2}{ر^3}$ ہے جہاں ر قطع ناقص کے متناظر نقطہ کا سمتی نیم قطر ہے۔

۴۶۔ ذیل کے ضابطہ کو ثابت کرو۔

$$\frac{1}{ی} = \left\{\frac{1}{ر} - \frac{1}{ر}\left(\frac{فر ر}{فر س}\right)^2 - \frac{فر^2 ر}{فر س^2}\right\} \div \left\{1 - \left(\frac{فر ر}{فر س}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اور مثال ۴۲ کے نتائج حاصل کرنے میں اسے لگاؤ۔

۴۷۔ ثابت کرو کہ قطبی محددوں میں اچل مماس کے لئے شرط ہے

$$\frac{فر^2 ع}{فر طہ^2} + ع = 0 \quad \text{جہاں} \quad ع = \frac{1}{ر}$$

۴۸۔ اس ضابطہ $سا = طہ + فہ = طہ + مم^{-1} \frac{1}{ر}\frac{فر ر}{فر طہ}$ سے قطبی محددوں میں انحنا کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو

$$\frac{1}{ی} = \left\{ر^2 - ر\frac{فر^2 ر}{فر طہ^2} + 2\left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^2\right\} \div \left\{ر^2 + \left(\frac{فر ر}{فر طہ}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

۳۷۲

$$= \left(\frac{\text{فر}^2 ع}{\text{فرط}^2} + ع\right) \div \left\{ ١ + \left(\frac{١}{ع} \frac{\text{فر} ع}{\text{فرط}} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$ جہاں $ع = \frac{1}{ر}$

۳۹ - اس ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ مبدا میں سے گذرنیوالا وتر انحنا ہے

$$2\left\{ ١ + \left(\frac{١}{ع} \frac{\text{فر} ع}{\text{فرط}} \right)^2 \right\} \div \left(\frac{\text{فر}^2 ع}{\text{فرط}^2} + ع \right)$$

امثلہ ۷۴

نیوٹن کا طریقہ

۱ - منحنی ا ما^2 = (لا - ع$_1$) (لا - ب$_1$)^2 کا نیم قطر انحنا نقطہ (ع$_1$، ۰) پر ہے

$$\frac{(ع_1 - ب_1)^2}{2\,ا}$$

۲ - نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ زنجیرہ ما = ا جمز $\frac{لا}{ا}$ کے راس پر نیم قطر انحنا ا کے مساوی ہے ۔

۳ - نقطہ (- ا، ۰) پر منحنی ما^2 = ا^2 (ا + لا) / لا کا نیم قطر انحنا $\frac{ا}{۲}$ ہے ۔

۴ - ڈاینہ ما^2 = ا^2 (ا - لا) / لا کا نیم قطر اس کے راس پر $\frac{ا}{۲}$ ہے ۔

۵ - نقطہ (ا، ۰) پر منحنی ا^2 ما^2 = لا^3 (ا - لا) کا نیم قطر انحنا دریافت کرو ۔

۶ - مکافی (لا - ما)^2 - ۲ ا (لا + ما) + ا^2 = ۰ کا نیم قطر انحنا ان نقطوں پہ دریافت کرو جہاں پر یہ محوروں کو مس کرتا ہے ۔

۷ - نقطہ لا = $\frac{\pi}{۲}$ پر منحنی ما = ۴ جب لا - جب ۲ لا کا نیم قطر انحنا دریافت کرو ۔ [۲،۹۵ ....]

۸ - مکافی ما = م لا + $\frac{لا^2}{ا}$ میں، مبدا پر، محور ما کے متوازی وتر انحنا کا طول (۱ + م^2) ا ہے اور دائرہ انحنا کی مساوات ہے

$$لا^2 + ما^2 = (١ + م^2)\, ا\, (ما - م\, لا)$$

۹ - منحنی ما = م لا + ن (لا - ا)^2 (لا - ب) کا انحنا نقاط (ا، ۰)، (ب، ۰) پر

۳۰۲

دریافت کرو۔

[(۱ + م^۲)^(۳/۲) / ۲ن (ا - ب)^۲]

۱۰۔ مبدا پر مخروطی ما = ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ کے دائرہ انحنا کی مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ منحنی سے دوبارہ خط مستقیم (ا - ب) ما = ۲ ھ لا پر ملتا ہے۔

۱۱۔ اگر ایک منحنی کی قطبی مساوات ر = فہ (طہ) ہو جہاں فہ (طہ)، طہ کا جفت تفاعل ہے تو نقطہ طہ = ۰ پر انحنا ہے [فہ(۰) - فہ''(۰)] / [فہ(۰)]^۲

۱۲۔ "زیادہ سے زیادہ کشش کے مجسم" (دیکھو مثال ۱۹ صفحہ ۴۴۹) کے نصف النہاری منحنی میں ثابت کرو کہ محور کے سروں پر نیم قطر انحنا بالترتیب ∞ اور ۲/۳ ا ہیں

۱۳۔ چشمہ منحنی ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کے کسی ایک سرے پر نیم قطر انحنا ا/۳ ہے۔

۱۴۔ استداری خط لا = ا طہ + ک جب طہ، ما = ا - ک جم طہ کے نیم قطر انحنا ان نقطوں پر جہاں یہ قاعدہ سے نزدیک ترین اور بعید ترین ہے (ا ± ک)^۲ / ک ہیں۔

۱۵۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ بردوریہ

لا = ا۱ جم ن۱ ت + ا۲ جم ن۲ ت، ما = ا۱ جب ن۱ ت + ا۲ جب ن۲ ت

کے انحنا کے نیم قطر ان نقاط پر جو مرکز سے قریب ترین اور بعید ترین ہیں یہ ہیں

(ن۱ ا۱ ± ن۲ ا۲)^۲ / (ن۱^۲ ا۱ ± ن۲^۲ ا۲)

یہ شرط مستنبط کرو کہ مرکز سے قریب ترین نقاط پر بردوریہ کو مرکز کی جانب مقعر ہونا چاہئے (جیسے چاند کا مدار بلحاظ سورج کے)۔

۱۶۔ لیساژو کے منحنی لا = ا جم ن ت، ما = ا جب ن ت کے نقطہ

ت ۰ پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔
اس منحنی کا خاکہ کھینچو۔ [۴ ب^۲ / ۵]

۱۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات قطبی محددوں (ر، ط) میں ہو اور قطب منحنی پر واقع ہو اور ابتدائی خط قطب پر کا مماس ہو تو ثابت کرو کہ قطب پر انحنا کا قطر
= نہا ر/ط ہے۔

منحنی ر = ا جم م ط کے قطب پر انحنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر ایک منحنی پر نقطہ پ ایسا ہو کہ اس پر کا انحنا غیر مسلسل ہو لیکن مماس کی سمت غیر مسلسل نہ ہو اور پ کی مقابل جانبوں میں پاس کے نقطے ق، ر ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ پ ق ر کا انحنا آخر الامر ہوگا $\frac{م_۱}{ر_۱} + \frac{م_۲}{ر_۲}$ جہاں ر~۱~، ر~۲~ دیے ہوئے منحنی کے انحنا کے نیم قطر ہیں پ کے دونوں جانب اور م~۱~، م~۲~ نسبتوں $\frac{پ ق}{ق ر}$ اور $\frac{پ ر}{ق ر}$ کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

۱۹۔ حادہ زاویہ جو ایک منحنی کا ایک وتر پ ق، پ پر کے مماس کے ساتھ بناتا ہے جبکہ ق کو پ کے لاانتہا قریب لیا جاتا ہے آخر الامر $\frac{۱}{۲} \frac{مف س}{ر}$ کے مساوی ہے جہاں مف س قوس پ ق ہے اور ر نیم قطر انحنا ہے پ پر۔

۲۰۔ اگر ایک لاانتہا چھوٹی قوس پ ق کے سروں پر کے مماس م پر ملیں تو آخر الامر م پ اور م ق نسبت تساوی میں ہونگے۔
یہ کیوں حاصل نہیں ہوتا کہ م کو پ ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملانیوالا خط آخر الامر پ ق پر عمود وار ہوگا۔

۲۱۔ یہ تسلیم کر کے کہ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نیم قطر $\frac{\frac{۱}{۲} ا}{جب ا}$ ہے ثابت کرو کہ مثال ۱۹ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لمسی دائرہ انحنا کے دائرہ پر منطبق ہوتا ہے۔

۲۲ – ثابت کرو کہ جب ایک ذرہ پر حاصل قوت حرکت کی سمت میں ہو تو راستہ کا مماس "اصل" ہوتا ہے۔

امثلہ ۴۸

(لفاف – برپیچے)

۱ – مکافیات ما² = ۴ عہ (لا – عہ) کا لفاف خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے جہاں عہ متبدل ہے۔

۲ – مکافی ما² = ۴ ا لا کے کسی نقطہ پ سے محددوں کے محوروں پر عمود پ م، پ ن نکالے گئے ہیں، م ن کا لفاف دریافت کرو۔

[ما² = - ۱۶ ا لا]

۳ – خط لا جم عہ + ما جب عہ = ا قط عہ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کا ہندسی مفہوم بیان کرو۔ ۲۰۵

۴ – مکافیوں ا ما² = عہ² (لا – عہ) کا لفاف جہاں عہ متبدل ہے یہ منحنی ہے ا ما² = ۴/۲۷ لا³

۵ – ایک منحنی کے سمتی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ انکا لفاف دئے ہوئے منحنی کا پائین خط ہے بلحاظ مبدا کے۔

۶ – مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کا لفاف معلوم کرو۔

۷ – ایک دائرہ کے محیط پر کے ثابت نقطہ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں، ان وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کا لفاف خط صنوبری ہے۔

۸ – قائم قطع زائد کے مرکزی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا لفاف برنولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۹ – ثابت کرو کہ منحنیات پ جم عہ + ق جب عہ = ط کا لفاف جہاں پ، ق، ط متغیروں لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل ہیں اور عہ متبدل ہے

$\text{پ}^2 + \text{ق}^2 = \text{ط}^2$ ہے۔

۱۰ — دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}\ \text{جم}\ \text{عہ} - ۲\,\text{ا}\,\text{ما}\ \text{جب}\ \text{عہ} = \text{ج}^2$ کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۱ — ع اور عہ کے درمیان رشتہ معلوم کرو کہ خط مستقیم $\text{لا}\ \text{جم}\ \text{عہ} + \text{ما}\ \text{جب}\ \text{عہ} = \text{ع}$ دائروں $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ما}^2 = \text{ب}^2$ اور $(\text{لا} + \text{عہ})^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ سے مساوی طول کے وتر کاٹے۔ ثابت کرو کہ اس شرط کے ماتحت خط کا لفاف قطع مکافی ہے۔

۱۲ — مستقل رقبہ کے ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کا مرکز وہی ہے اور جنکے محور سمت میں ایکدوسرے پر منطبق ہیں، ثابت کرو کہ لفاف دو مزدوج قائم زائدوں پر مشتمل ہے۔

۱۳ — ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں $(\pm \text{ج}، ۰)$ سے اس پر کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل $(= \text{ب}^2)$ ہے، ثابت کرو کہ لفاف ناقص ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2 + \text{ج}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ اگر عمود متحرک خط کے ایک ہی جانب ہوں یا زائد ہے $\frac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2 - \text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ اگر عمود خط کی متقابل جانبوں میں ہوں۔

۲۷۶

۱۴ — قطع مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کا لفاف $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{ا})$ ہے۔

۱۵ — قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے دوہرے معینوں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ لفاف ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ ہے۔

۱۶ — ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں $(\pm \text{ج}، ۰)$ سے خط پر کے عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل $(= ۲\,\text{م}^2)$ ہے، ثابت کرو کہ لفاف

مخروطی تراش $\frac{\text{لا}^2}{\text{م}^2 - \text{ج}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{م}^2} = ۱$ ہے، مختلف صورتوں کا معائنہ کرو۔

۱۷- ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس پر کے عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ لفاف قطع ناقص ہے۔

۱۸- ان ناقصوں $\text{لا} = \text{ا جب}\,(\text{طا} - \text{عا})$، $\text{ما} = \text{ب جم طا}$ کا لفاف معلوم کر جہاں عا متبدل ہے۔

۱۹- متبدل ج کے لئے جو زنجیرے $\text{ما} = \text{ج جمز}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ج}}\right)$ سے تعبیر ہوتے ہیں ان کا لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے۔

۲۰- ان ناقصوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{عا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کا لفاف جہاں $\text{عا} + \text{ب} = \text{م}$ (مستقل)، ستارہ نما $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ما}^{\frac{2}{3}} = \text{م}^{\frac{2}{3}}$ ہے۔

۲۱- خط مستقیم کا لفاف جو محددوں کے محوروں پر ایسے مقطوعے کاٹتا ہے جن کا مجموعہ م ہے یہ قطع مکافی $\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{م}}$ ہے۔

۲۲- دو نقطے محددوں کے محوروں پر مختلف، مستقل رفتاروں سے حرکت کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا خط ایک قطع مکافی کو مس کرتا ہے۔ ۲۷۷

۲۳- قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے کسی نقطہ سے محددوں کے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے قدموں کو ملانیوالے خط مستقیم کا لفاف $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} = ۱$ ہے۔

۲۴- منحنیات $\text{عا ما}^2 = \text{لا}\,(\text{لا} + \text{عا})^2$ کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق دریافت کرو جہاں عا متبدل ہے۔ اور جو نتیجہ حاصل ہو اسکا معائنہ کرو۔

۲۵- مستقل نیم قطر کے ایک دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک دئے ہوئے منحنی پر واقع

ہوتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنی ہیں۔

۲۶۔ دئے ہوئے نیم قطر کا ایک دائرہ، ایک دئے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کا لفاف دو متوازی منحنیات پر مشتمل ہے۔

۲۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات اس شکل $ر^{۲} = ف(ع)$ میں دی ہوئی ہو تو اسکے کسی متوازی منحنی کی مساوات اس شکل $ر^{۲} = ف(ع - ج) + ۲ج ع - ج^{۲}$ میں ہوگی۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ منفی پائیں منحنیات (دفعہ ۱۳۱) کا مسئلہ خط مستقیم $لا\ جم\ سا + ما\ جب\ سا = ع$ کا لفاف معلوم کرنیکے معادل ہے جہاں ع متبدل سا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔

اسکی تصدیق کرو کہ اسی سے دفعہ ۱۳۱ کا ضابطہ (۴) حاصل ہوتا ہے۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ مکافی $ما^{۲} = ۴ ا لا$ کا منفی پائیں منحنی، بلحاظ راس کے یہ منحنی ہے $ا ما^{۲} = \frac{۱}{۲۷}(لا - ۴ا)^{۳}$

۳۰۔ لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ دائرہ کا منفی پائیں منحنی قطع ناقص ہوگا اگر قطب دائرہ کے اندر ہو اور قطع زائد ہوگا اگر قطب دائرہ کے باہر ہو۔

۳۱۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کے کسی نقطہ پر انحنا کے نیم قطر کے سامنے قطب پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۳۲۔ مساوی الزاویہ لولبی کا پریچہ اسی زاویہ کا مساوی الزاویہ لولبی ہوتا ہے۔

۳۳۔ قطع ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے پریچہ سے گھرا ہوا رقبہ

$۳\pi(ا^{۲} - ب^{۲})^{۲} / ۸ ا ب$ ہے۔

۳۴۔ منحنی $ا ما^{۲} = لا^{۳}$ کے کسی نقطہ پر کے مرکز انحنا کے محدد ہیں

$$ضا = -لا - \frac{۹}{۲}\frac{لا^{۲}}{ا}،\quad عا = ۴ما + \frac{۴}{۳}\frac{ا ما}{لا}$$

ثابت کرو کہ مبدا کے نزدیک پریچہ کی شکل مکافی $ما^{۲} = -\frac{۱۶}{۹} ا لا$ کی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی نقطہ انعطاف رکھتا ہو تو اس کا پریچہ

ایک متقارب رکھتا ہے۔

ثابت کروکہ منحنی ا۲ ما = لا۳ کے برپیچہ کا وہ حصہ جو منحنی کے اُس حصہ کے جواب میں ہے جو مبدأ کی پڑوس میں ہے تقریبًا قطع زائد لا ما = ۱/۱۲ ا۲ سے تعبیر ہوسکتا ہے۔

۳۶۔ قطع زائد لا = ا جمز ۶، ما = ب جبز ۶ کا برپیچہ

(ا لا)^(۲/۳) ـ (ب ما)^(۲/۳) = (ا۲ + ب۲)^(۲/۳) ہے۔

۳۷۔ نقطہ و سے شعاعین نکلکر ایک دئے ہوئے منحنی سے منعکس ہوتی ہیں، ثابت کروکہ منعکسہ شعاعیں سب کی سب ایسے منحنی پر عماد ہیں جو بلحاظ و کے، معلومہ منحنی کے پائیں منحنی کا متشابہ ہے لیکن دوہرے ابعاد والا ہے۔

۳۸۔ اس لئے ثابت کروکہ دائرہ پر کے انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ گھونگا منحنی کا برپیچہ ہے۔ اور اُس خاص صورت میں جبکہ روشن نقطہ دئے ہوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہے آتشی خط صنوبری ہے۔

۳۹۔ ثابت کروکہ کسی منحنی پر انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ ایسے دائروں کے نظام کے لفاف کا برپیچہ ہے جو منحنی کے مختلف نقطوں کو مرکز مان کر کھینچے جائیں اور سب کی سب روشن نقطہ میں سے گذریں۔

انعطاف کی صورت میں متناظر مسئلہ کیا ہوگا۔

۲۷۹

امثلہ ۴۹

(گردو نئے، وغیرہ)

۱۔ ایک پترا کسی طرح سے بھی اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے، ثابت کروکہ پترے میں کے متوازی خطوط متوازی منحنیات کو لفت کرتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور اُس پر کا ایک نقطہ ف ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے جو و میں سے گذرتا ہے، ثابت کروکہ فوری مرکز ف میں سے گذرنیوالے

قطر کا دوسرا سرا ہے اور دو مرکز طریق دریافت کرو۔

گھونگا منحنی کے عماد کھینچنے کا عمل دریافت کرو اور اس سے یہ نتیجہ حاصل کرو کہ خط صنوبری میں، قرن میں سے گذرنے والے وتر کے سروں پر کے عماد، اُس خط پر علی القوائم کاٹتے ہیں جو اس نقطہ (قرن) میں سے وتر پر عمود ہو۔

۳۔ ایک مستوی شکل اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس میں کے دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں، دو مرکز طریق کو دریافت کرو۔

۴۔ اگر ایک دائرہ اپنے سے نصف ناپ کے ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے اور پورا اسکے گرد آ جائے تو ہر ایک خط مستقیم جو لڑھکنے والے دائرہ پر سوار ہو ایک دائرہ کو لف کریگا۔

۵۔ اگر ایک مستوی شکل اسطور پر حرکت کرے کہ اس میں کا ایک خط مستقیم ایک ثابت دائرہ پر لڑھکے تو شکل میں کے کسی اور خط مستقیم کا لفاف دائرہ کا ایک دریچیہ ہے۔

۶۔ خط مستقیم عہ لا + بہ ما = ۱ کے لفاف کا نیم قطر انحنا جہاں عہ، بہ متبدل ت کے دئے ہوئے تفاعل ہیں $\pm \dfrac{(عہ^2 + بہ^2)^{\frac{3}{2}}(عہَ بہً - عہً بہَ)}{(عہ بہَ - عہَ بہ)^3}$ ہے جہاں زبریں بلحاظ ت کے تفرقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

۷۔ اگر ایک منحنی جسکی مماسی قطبی مساوات ر = ف (ع) ہے ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کے راستہ کا انحنا ہے۔ $\dfrac{ف}{فرع}\left(\dfrac{ع}{ر}\right)$ جہاں ر نقطہ تماس کا سمتی نیم قطر ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اگر قطع مکافی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو ماسکہ کا راستہ زنجیرہ ہے۔

۹۔ اگر ایک مخروطی تراش ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو کسی ایک ماسکہ کا راستہ ایک منحنی ہے $\dfrac{1}{ر} + \dfrac{1}{د} = \dfrac{1}{ج}$ جہاں ر نیم قطر انحنا ہے، د عماد ہے اور ج مستقل۔

۳۸۰

۱۰ــ اگر ایک مساوی الزویہ لولبی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کا راستہ ایک خط مستقیم ہوگا۔

۱۱ــ اگر شکانی لولبی ر = $\frac{ا}{ط^{ہ}}$ ایک خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب کا راستہ خط جرّی ہوگا۔

۱۲ــ اگر کوٹس کے لولبیوں $\frac{۱}{ع^{۲}} = \frac{۲}{ر^{۲}} +$ ب میں سے کوئی ایک، ایک خط مستقیم پر لڑھکے تو قطب ایک منحنی مرتسم کریگا جس کا انحنا ایسے بدلیگا جیسے عماد۔

۱۳ــ ایک منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہے، ثابت کرو کہ اُس گردونیہ کی قوس جسے کوئی برداشتہ نقطہ مرتسم کرتا ہے اِس منحنی کی متناظر قوس کے مساوی ہے جو لحاظ و کے دئے ہوئے منحنی کا پائیں منحنی ہے۔ [Steiner]

۱۴ــ بند بیضوی منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہے، ثابت کرو کہ وہ متغیر خط جو نقطہ تماس کو اندرونی محمولہ نقطہ و سے ملاتا ہے ایک پوری گردش میں اتنا رقبہ عبور کرتا ہے جو بلحاظ نقطہ و دے ہوے منحنی کے پائیں منحنی کے رقبہ کا دو چند ہے۔ [Steiner]

۱۵ــ فوری مرکز کے نظریہ سے ثابت کرو کہ جب جوڑدار ڈنڈوں کے مستوی ذو اربعۃ الاضلاع سے گھرا ہوا رقبہ اعظم (ساکن) ہو تو ذو اربعۃ الاضلاع ہم محیط ہوگا۔

اصطلاحات صغاری احصا

جلد دوم

Acoustics	علم آواز
Anchor-ring	لنگر چھلا
Annular	حلقہ دار، حلقہ نما
Astroid	ستارہ نما
Asymptotes	متقارب
Auxiliary circle	معاون دائرہ
Bipolar	دو قطبی
Body centrode	جسمی مرکز طریق
Cardioid	خط صنوبری
Carried line	خط برداشتہ
Catenary	زنجیرہ
Caustic	ہم آتشی
Centrode	مرکز خط
Centre of rotation	گھماؤ کا مرکز
Circuit	چکر
Cissoid	لبلابی خط
Comet	شہاب
Commensurable	متوافق
Cone	مخروط
Conic	مخروطی
Contour line	ہم ارتفاعی خط
Convergence	استدقاق
Crank	کرنک
Critical case	فاصل صورت
Crossed parallelogram	متقاطع متوازی الاضلاع
Cusp	قرن

English	اردو
Cyclic Quadrilateral	ہم محیط چار ضلعی
Cycloid	خط تدویر
Definite integral	محدود تکملہ
Directrix	مرتب
Eccentricity	خروج المرکز
Ecliptic	طریق الشمس
Ellipsoid	ناقص نما
Elliptic Integral	ناقصی تکملہ
Ellipticity	ناقصیت
Envelope	لفاف
Epicyclic	بردوریہ
Epicycloid	برتدویر
Epitrochoid	بالاستداری
Equipotential	ہم قوہ
Evolute	برپیچہ
Flexure	خم
Focus	ماسکہ
Frustum	ناقص، ناکمل، مقطوعہ
Geodesy	ارضیات
Harmonic	موسیقی
Hyperboloid	زائد نما
Hypocycloid	درتدویر
Hypotrochoid	برتدویر
Impulse	دھکہ
Indefinite Integral	نامحدود تکملہ
Indicator diagram	نمایندہ تصویر
Index	نمایندہ یا اشاریہ
Instantaneous centre	فوری مرکز
Integral	تکملہ
Integration	تکمل
Integration by parts	تکمل بالحصص
Intercept	اپنی حصہ
Interpolation	بینی ادراج
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Involute	درپیچہ
Irrational	غیر ناطق
Lamina	پترا
Latus-rectum	وتر خاص
Lemniscate	چشمہ منحنی
Limacon	گھونگا منحنی

English	اردو
Line-roulette	خط گردونیہ
Linkage	رابطہ
Link-work	رابطہ کاری
Loop	حلقہ
Magnetic curves	مقناطیسی منحنی
Mechanical	حیلی
Modulus	مقیاس
Multiple Integral	ضعفی تکملہ
Node	عقدہ
Optical	مناظری
Optics	علم مناظر
Orientation	تشریق
Oscillating cylinder	اہتزازی اسطوانہ
Osculating circle	لثمی دائرہ
Oval	بیضہ
Paraboloid	مکافی نما
Parameter	متبدل
Partial	جزوی
Pericycloid	گرد تدویر
Period	دور
Phase	ہیئت
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Planimeter	سطح پیما
Point-roulette	نقطہ گردونیہ
Polar	قطبی
Pole	قطب
Prolate Ellipsoid	لمبوترا ناقص نما
Prolate spheroid	لمبوترا کرہ نما
Pyramid	مخروط مضلع
Quadrature	تربیع
Range	ٹپہ
Rational	منطق
Reciprocal	تکافی
Rectification	تخطیط
Reduction	تحویل
Reflection	انعکاس
Refraction	انعطاف
Refractive Index	انعطاف نما
Retrograde	رجعی
Rolling curves	لڑھکنے منحنی، غلطان منحنی
Roulette	گردونیہ
Screw-thread	پیچ تاگا
Semi-cubical parabola	نیم کعبی مکافی
Space centrode	فضائی مرکز طریق
Space Integral	مکانی تکملہ
Spandril	کمان شانہ

اشاریہ

اعداد صفحوں کے لحاظ سے